

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

K.W. FRITZ KOHLRAUSCH UND HANS THIRRING

GRAZ

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN

GRAZ

2. BAND, 3. UND 4. HEFT (SCHLUSSHEFT)

MIT 45 ABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM FEBRUAR 1949)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1949

Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen

Allgemeines. Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht gerade an demselben Problem arbeiten. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift ist ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle. Nur den wenigsten ist es gegeben, auf den ersten Anhieb schon das Optimum an Aufbau, Gliederung und Ausdruck zu erreichen. Meist wird dies erst nach mehrfachem Umarbeiten gelingen. Diese Mühe muß der Autor auf sich nehmen. Erstens schon in seinem eigenen Interesse, um nicht monatelange Arbeit durch unzweckmäßige Darstellung der Ergebnisse zu entwerten; zweitens im Interesse der Drucklegung, da nachträgliche stilistische Verbesserungen und Veränderungen so viel Mehrarbeit für den Setzer bedeuten, daß sie, selbst wenn die Kosten dem Autor angerechnet werden, bei den heutigen Verhältnissen als untragbar bezeichnet werden müssen. Eben diese Verhältnisse machen es den Herausgebern zur unabweislichen Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Manuskripte sind entweder an die Herausgeber Prof. Dr. K. W. Fritz *Kohlrausch*, Graz, Rechbauerstraße 12, oder Prof. Dr. Hans *Thirring*, Wien IX, Strudlhofgasse 4, oder an den Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5, zu richten.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

2. Band/3. u. 4. Heft Inhaltsverzeichnis

| | Seite |
|--|-------|
| Thirring, Hans. Arnold Sommerfeld zum 80. Geburtstag | 221 |
| Cap, Ferdinand. Über zwei Verfahren zur Lösung eindimensionaler instationärer gasdynamischer Probleme | 224 |
| Philipp, Elisabeth Maria. Einfache Methode zur Messung von Dämpfungsänderungen bei Zentimeterwellen | 239 |
| Meyer, Stefan, und Agathe Koss-Rosenqvist. Weitere Bemerkungen zum Schema der chemischen Elemente | 245 |
| Porod, Günther. Die Abhängigkeit der Röntgen-Kleinwinkelstreuung von Form und Größe der kolloiden Teilchen in verdünnten Systemen, IV | 255 |
| Schedling, Hans. Experimentelle Überprüfung der Gültigkeit des <i>Stokes-Cunninghamschen</i> Gesetzes an in Stickstoff fallenden Selenkugeln des Durchmessers $6 \cdot 10^{-5}$ — $26 \cdot 10^{-5}$ cm | 293 |
| Kremenak, Berta. Zur Frage der Genauigkeit der Radiumstandardpräparate | 299 |
| König, H. W. Dynamische Elektronenströmung unter dem Einfluß dynamischer Felder | 312 |
| Rüling, Johanna, und Herma Gheri. Neues Verfahren zur Messung von Krümmung und Streuwinkeln an Nebelkammerbahnen | 335 |
| Castelliz, L., und F. Halla. Ferromagnetische Wechselwirkungen in Manganlegierungen | 348 |
| Jordan, P. Die empirischen Unterlagen der Theorie der Sternentstehung | 356 |
| Urban, P., und F. Schwarzl. Zum Streuproblem von Nukleonen | 368 |
| Thirring, Hans. Über das mögliche Ausmaß einer radioaktiven Verseuchung durch die Spaltprodukte des U^{235} | 379 |
| Buchbesprechungen | 401 |

Arnold Sommerfeld zum 80. Geburtstag.

Von

Hans Thirring, Wien.

Beim Gedanken an *Sommerfeld* kommt einem unwillkürlich der Begriff eines „Vaters der theoretischen Physiker“ in den Sinn, weil der heute Achtzigjährige nicht nur eine Rekordzahl berühmt gewordener Schüler herangebildet hat, sondern darüber hinaus auch vielen anderen Kollegen Berater, Helfer, Lehrmeister und Vorbild geworden ist.

Hier eine Liste von ehemaligen Schülern *Sommerfelds*, von denen ein rundes Viertelhundert selbst schon Hochschullehrer geworden sind und von denen einige zu den leuchtendsten Sternen unserer Wissenschaft gehören: *Bethe, Debye, Ewald, Fues, Grimm, Heisenberg, Herzfeld, Hopf, Hund, Kossel, Kratzer, Kunz, Landé, Laporte, Lenz, London, Maue, Ott, Pauli, Pauling, Peierls, Rogowski, Rubinowicz, Seeliger, Unsöld, Welker, Wentzel*.

Man wird schwerlich einen zweiten Gelehrten auf der Welt finden, der so viele ausgezeichnete und selbst wieder fruchtbar gewordene Schüler herangebildet hat. *Sommerfeld* wäre aber nicht der Lehrer par excellence geworden, der er faktisch ist, wenn er nicht gleichzeitig auch ein hervorragender Forscher wäre und ein Mann mit einer erstaunlichen Universalität des Wissens auf dem Gebiete seiner eigenen Fächer, der Mathematik und Physik, und darüber hinaus hinsichtlich allgemein menschlicher Bildung überhaupt. *Sommerfeld* gehört zu dem im kriegsdurchfurchten 20. Jahrhundert immer seltener werdenden Typus von Gelehrten, die solides und umfassendes Wissen und Können mit dem ästhetischen Sinn für das Erhabene und Schöne harmonisch zu vereinen wissen. Als Gymnasiast ahnt der Jüngling Arnold noch gar nicht, daß er einmal ein großer Physiker werden wird, und obwohl er aus einer Arztfamilie stammt, schweift sein Interesse weit über den Bereich der Naturwissenschaften hinaus in das Gebiet der Philosophie, Geschichte und Literaturgeschichte; an ihm bemerkt man gar nichts von jener strengen Scheidung der Fähigkeiten und Interessen, die bei vielen jungen Leuten zur Folge hat, daß die sprachlich Begabten schlechte Mathematiker sind, während die guten Mathematiker in den klassischen Fächern versagen. *Sommerfeld* verläßt das Gymnasium mit Sprach- und

Geschichtskenntnissen, die aus ihm ebensowohl einen guten Humanisten hätten werden lassen wie einen Meister der exakten Wissenschaft.

Erst auf der Hochschule gerät er unter der Anleitung jener ausgezeichneten Lehrer, über die damals die Königsberger Universität verfügte, ganz in den Bann der Mathematik und Physik, wobei gerade auch sehr abstrakte Probleme der Algebra und der Zahlentheorie zuerst seine Aufmerksamkeit fesseln. Den letzten Schliff erhält seine Ausbildung bei dem großen Mathematiker und Pädagogen *Felix Klein* in Göttingen, von dem er drei Dinge erlernt: Meisterschaft der Darstellung, strenge Exaktheit des mathematischen Denkens und lebendigen Sinn für die Anwendung der Mathematik auf die Bedürfnisse der Naturwissenschaft und Technik. Das von *Sommerfeld* mit *Klein* gemeinsam verfaßte dreibändige Werk über die Theorie des Kreisels ist das klassische Standardwerk über diesen Gegenstand geworden; um dieselbe Zeit wird der jugendliche Gelehrte auch schon mit der Herausgabe des Bandes Physik der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften betraut, gerät auf diese Weise in Kontakt mit einer großen Anzahl von Mitarbeitern an diesem gewaltigen Unternehmen und gewinnt gleichzeitig Einblick in alle Zweige der theoretischen Physik.

Seine äußerliche Laufbahn führt *Sommerfeld* über die Bergakademie von Clausthal, an der er von seinem 29. Lebensjahr an durch drei Jahre hindurch schon als Professor wirkt, nach Aachen, wohin er als Nachfolger *Willy Wiens* berufen wird, und von dort im Jahre 1906 als Nachfolger *Ludwig Boltzmanns* an das Institut für theoretische Physik der Münchner Universität, das durch ihn zur hervorragendsten Ausbildungsstelle von theoretischen Physikern in der Welt überhaupt wurde.

Sommerfelds Forschertätigkeit ist durch ihre unglaubliche Vielseitigkeit ausgezeichnet. Bei vielen anderen großen Physikern der Gegenwart sind wir gewohnt, ihre Werke in einer ganz prägnanten theoretischen oder experimentellen Entdeckung kulminieren zu sehen, der gegenüber die anderen Leistungen des gleichen Forschers mehr oder minder in den Hintergrund treten. Aber *Sommerfeld* ist auf theoretischem Gebiet ähnlich vielseitig und universell wie einst *Faraday* auf experimentellem. Neben seiner größten Tat, der Erweiterung der *Bohrschen* Theorie auf nichtentartete Systeme, die schlagartig eine Fülle von Rätseln der Spektralerscheinungen entwirrte, hat er noch eine ganze Anzahl von Pionierleistungen auf völlig anderen Zweigen der theoretischen Physik vollbracht. Von ihm stammen die Grundlagen der Theorie der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen längs der Erdoberfläche, er hat zum erstenmal die exakte Lösung eines Beugungsproblems als Randwertaufgabe der *Maxwellschen* Gleichung gegeben. In *Sommerfelds* Institut,

gerade richtig in der Atmosphäre des von ihm ausgehenden Geistes, hat *Läue* im Jahre 1912 die große Entdeckung der Röntgenstrahlinterferenzen an Kristallgittern gemacht, durch die einerseits die Erforschung der Kristallstrukturen, andererseits die Spektroskopie im Gebiete der Röntgenstrahlen angebahnt wurde, eine Errungenschaft, ohne die wir die heutige Physik gar nicht mehr denken können. Eineinhalb Jahrzehnte später beginnt *Sommerfeld* seine grundlegenden Untersuchungen über die Elektronentheorie der Metalle, auf der alle neueren theoretischen Untersuchungen über die metallische Leitfähigkeit basieren. Neben allen diesen großen Leistungen liegt noch eine Vielfalt von ausgezeichneten Arbeiten auf den verschiedenartigsten Gebieten der theoretischen Physik vor, die eine wertvolle Bereicherung der einschlägigen Literatur bilden.

Zu alldem ist *Sommerfeld* nicht nur als akademischer Lehrer durch die Klarheit und Lebendigkeit seines Vortrags der große Lehrmeister, sondern ebenso auch als Autor von Standardwerken. Sein Buch über „Atombau und Spektrallinien“ ist die repräsentative Darstellung sowohl der älteren *Bohrschen* Quantentheorie wie auch der modernen Wellen- und Quantenmechanik; gerade diesem Werk verdanken Tausende von Lesern den Zugang zu einem der schwierigsten Kapitel der Physik, das ihnen sonst wohl lebenslänglich ein Buch mit sieben Siegeln geblieben wäre. Heute arbeitet *Sommerfeld* an der Herausgabe seiner Vorlesungen, von denen jeder neue Band mit Spannung erwartet wird.

Das Geheimnis von *Sommerfelds* Persönlichkeit ist sein Enthusiasmus für die märchenhafte Schönheit des voller Rätsel stehenden Zaubergartens der Natur und für den sublimen Reiz des Unternehmens, ein Geheimnis nach dem anderen zu entschleiern und dabei in der Tiefe auf immer wieder neue zu stoßen. Das glückliche Zusammentreffen zweier Eigenschaften, des scharfen, zu schwieriger Denkarbeit fähigen Verstandes und des großen begeisterungsfähigen Herzens, dazu noch Integrität des Charakters, das neidlose Anerkennen fremder Verdienste, die selbstlose Freude an dem Emporwachsen der Schüler, all das hat zusammengewirkt, um diese eine Persönlichkeit zu einem geistigen Zentrum der schwierigen und doch so schönen Wissenschaft der theoretischen Physik zu machen. In *Sommerfeld* erblicken wir eine Forschergestalt von echtem Schrot und Korn, vor der wir uns alle in Liebe und Ehrfurcht neigen.

Über zwei Verfahren zur Lösung eindimensionaler instationärer gasdynamischer Probleme¹⁾.

Von

Ferdinand Cap.

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

Mit 9 Abbildungen.

(Eingelangt am 28. Juni 1947.)

Zusammenfassung.

Auf Grund der bekannten hydrodynamischen Grundgleichungen wird eine Potentialgleichung für instationäre eindimensionale kompressible Strömungen abgeleitet und ihre Lösung mittels des Charakteristikenverfahrens in Angriff genommen. Die Potentialgleichung wird in der Folge mittels *Legendre-Transformation* umgeformt. Die Charakteristiken der transformierten Potentialgleichung ermöglichen nämlich die strenge Begründung eines von *Schultz-Grunow* skizzierten graphischen Verfahrens, das in den beiden letzten Kapiteln der Arbeit weiter ausgebaut wird. Sämtliche Überlegungen sind nicht nur — wie bei *Schultz-Grunow* — für ideale Gase, sondern für beliebige Gase gültig. Die Anwendung des Verfahrens auf praktische Probleme wird ebenso wie die Ausdehnung auf unstetige, nicht adiabatische Strömungsvorgänge angedeutet.

1. Die Potentialgleichung.

Durch die Berücksichtigung der Kompressibilität des Strömungsmediums werden die an sich schon kompliziert gebauten Differentialgleichungen der Hydrodynamik mit weiteren mathematischen Schwierigkeiten versehen. Zu den drei skalaren Komponenten der Strömungsgleichung (1) und zur Kontinuitätsgleichung (2) tritt als fünfte Gleichung die Zustandsgleichung (3) des Gases; neben $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$ und $p(x, y, z, t)$ ist noch $\rho(x, y, z, t)$ zu bestimmen.

Unter Vernachlässigung der Reibungsglieder sowie der Schwerebeschleunigung lautet die Strömungsgleichung

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \nabla p \quad (1)$$

¹⁾ Diese Arbeit ist teilweise ein Auszug aus der gleichbetitelten Dissertation von *F. Cap*, Universität Wien, 1945; die Darstellung geht zum Teil auf gemeinsame Arbeiten mit *E. Fues* zurück.

bzw. in Komponenten (*Eulersche Gleichungen*)

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\quad (1')$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet unter der Annahme der Konstanz der Gesamtmasse²⁾ des betrachteten Gases

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Die Zustandsgleichung hat allgemein die Form $f(\rho, p, T) = 0$, da aber die Wärmeleitung vernachlässigt werden soll, kann man sich mit

$$f(p, \rho) = 0 \quad (3)$$

begnügen.

$\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\text{adiab.}}}$ definiert die Schallgeschwindigkeit a .

Gasdynamische Strömungen erfolgen sehr rasch; es hat ja nur bei hohen Drucken und Geschwindigkeiten einen Sinn, die Kompressibilität des Gases zu berücksichtigen; z. B. gibt *Sauer*³⁾ für Luft ($k = 1,4$) von 15° C als obere Grenze der inkompressiblen Behandlung bei einer verlangten Rechengenauigkeit von 10% eine Geschwindigkeit von 50 m/sec an. Es ist daher die Annahme der adiabatischen Zustandsänderung für kleine Apparatabmessungen sicherberechtigt. Damit sind Verdichtungsstöße, die ein bestimmtes⁴⁾ Druckverhältnis überschreiten, von der Behandlung durch die in dieser Arbeit mitgeteilten Verfahren ausgeschlossen.

Es sollen nun zwei sich später als nützlich erweisende Funktionen definiert werden:

die bekannte Druckfunktion

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)_{\text{adiab.}}}; \quad \nabla P = \frac{\nabla p}{\rho} = a \nabla H \quad (4)$$

²⁾ Siehe *Cap*, Über eine Erweiterung der Strömungs- und der Kontinuitätsgleichung der instationären Gasdynamik für den Fall des Vorhandenseins von Gasquellen und des Mitgerissenwerdens fester oder flüssiger Partikel, *Acta Phys. Austr.*, Bd. I, Heft 1, S. 89.

³⁾ *Sauer*, Theoretische Einführung in die Gasdynamik (Springer).

⁴⁾ *Cap*, Dissertation S. 25. Bei einer verlangten Rechengenauigkeit von 10% können Verdichtungsstöße bis zu einer Verdichtung von 1,64 adiabatisch behandelt werden; s. auch ⁵⁾.

und die „Schallfunktion“⁵⁾

$$H = \int \frac{dp}{a(p) \rho(p)_{\text{adiab.}}} = \int \frac{a}{\rho} \frac{d\rho}{\rho}, \text{ da ja } a^2 = \frac{dp}{d\rho};$$

$$\nabla H = \frac{a \nabla \rho}{\rho} = \frac{\nabla P}{a} = \frac{\nabla p}{a \rho} \quad (5)$$

P und H sind also Funktionen von p , in die die adiabatische Zustandsgleichung des Gases „hineinverarbeitet“ ist.

Für ein ideales Gas mit der Adiabate $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2k}{k-1}}$

ist $P = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} = \left\{ \frac{a^2 - a_0^2}{k-1} \right\} = \frac{kRT}{k-1}$ (4id) und $H = \frac{2}{k-1} a$, (5id)

während für ein Abelsches Gas ($p(V-\beta) = RT$) mit der leicht

ableitbaren Adiabate $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\tilde{\rho}}}{\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\tilde{\rho}_0}} \right)^k$ $\tilde{p} = \frac{1}{\beta}$ folgt

$$P = \beta p + \left(\frac{1}{\rho_0} - \beta \right) p_0 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot p^{\frac{k-1}{k}} \quad (4 \text{ Ab})$$

und
$$H = H_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \quad (5 \text{ Ab})$$

Für die Schallgeschwindigkeit erhält man für ein ideales Gas

$$a = \sqrt{\frac{k p}{\rho}} = \sqrt{k R T}$$

und für ein Abelsches $a^2 = k p \frac{\left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{1}{k}} (v_0 - \beta) + \beta \right]^2}{\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-1/k} \cdot (v_0 - \beta)} \quad (4b); v_0 = \frac{1}{\rho_0}$

Die Integration⁶⁾ des Systems (1', 2, 3) wird am einfachsten durch Rückführung auf eine Differentialgleichung in Angriff genommen. Unter Vernachlässigung der Wandreibung kann gleich die Annahme völliger Wirbelfreiheit gemacht werden. Es gilt dann $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ und $\mathbf{v} = -\nabla \varphi$.

⁵⁾ Eine ähnliche Funktion führt schon *Riemann* in seinen Arbeiten über Gaswellen endlicher Amplitude ein (s. Ges. Werke).

⁶⁾ Siehe z. B. die komplizierten Rechnungen von *Bechert*, Zur Theorie ebener Störungen in reibungsfreien Gasen, Ann. d. Ph. **37**, 2, 1940, S. 89.

Damit erhält man für (1)

$$\rho \nabla \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right\} = -\nabla p \text{ oder } \nabla \left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right\} = -\nabla P = -a \nabla H = -\frac{a^2 \nabla \rho}{\rho} \quad (6)$$

Für (2) erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \rho \nabla \varphi - \rho \Delta \varphi = 0 \text{ oder } (7') \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0. \quad (7)$$

Räumliche Integration von (6) ergibt

$$\left\{ -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + P \right\} = Z(t) \quad (\text{instationäre Bernoulli-Gleichung}). \quad (8)$$

Für stetige Strömungen kann man nun, wie *Sauer*⁷⁾ gezeigt hat, unbeschadet der Allgemeinheit $Z(t) = \text{konst.}$ setzen. Differenziert man nun nach t , so erhält man

$$\left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2 + \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0;$$

da nun $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{a^2 d\rho}{\rho}$ oder nach Vertauschung von Differentiation und Integration

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int d \frac{a^2 \partial \rho}{\rho \partial t} = \frac{a^2 \partial \rho}{\rho \partial t}, \quad (9)$$

es ist ja $dP = \frac{a^2 d\rho}{\rho}$, so ergibt sich $\frac{\nabla \rho}{\rho} = \frac{1}{a^2} \nabla \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right\}$

und $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2 \right\}$.

Setzt man diese beiden Ausdrücke in (7') ein, so erhält man

$$\frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2 \right\} - \frac{\nabla}{a^2} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right\} \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0. \quad (10)$$

(10) stellt die instationäre Potentialgleichung kompressibler adiabatischer Strömungen dar. Eine Integration in allen vier Variablen ist von vornherein aussichtslos; es soll daher nur die — noch reichlich komplizierte — eindimensionale Gleichung behandelt werden. Diese lautet:

$$\varphi_{xx} (a^2 - \varphi_x^2) + 2 \varphi_x \varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0. \quad (11)$$

⁷⁾ Bericht aus der Zentrale für wiss. Berichtswesen „Theorie der nichtstationären Gasströmung“, F. B. 1675, Berlin 1944.

Der Zusammenhang von a und φ folgt aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = P(p(a)). \quad (8)$$

Für ein ideales Gas ergibt sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = \frac{a^2 - a_0^2}{k-1} \quad \text{oder} \quad a^2 = a_0^2 + (k-1) \left[\varphi_t - \frac{1}{2} \varphi_x^2 \right].$$

Für ein *Abelsches* Gas erhält man einen sehr komplizierten Ausdruck der Form

$$(k-1) \left[\varphi_t - \frac{1}{2} \varphi_x^2 \right] = f(a),$$

der jedoch nicht gebraucht wird.

2. Das Charakteristikenverfahren.

Die Lösung der Differentialgleichung (11) erfolgt am besten mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens. Die Gleichung ist von folgendem Typ

$$A \varphi_{xx} + B \varphi_{xt} + C \varphi_{tt} = 0. \quad (12)$$

Eine solche Differentialgleichung 2. Ordnung heißt

hyperbolisch, wenn $B^2 - 4AC > 0$ (reelle Ch.),
elliptisch, wenn $B^2 - 4AC < 0$ (imaginäre Ch.) und
parabolisch, wenn $B^2 - 4AC = 0$.

Eine Differentialgleichung vom Typ (12) heißt linear, wenn $A = A(x, t)$, $B = B(x, t)$, $C = C(x, t)$ und quasilinear, wenn — wie bei (11) — $A = A(x, t, \varphi_x, \varphi_t)$, $B = B(x, t, \varphi_x, \varphi_t)$, $C = C(x, t, \varphi_x, \varphi_t)$. Bei linearen Differentialgleichungen liegen bekanntlich die Charakteristiken ein für allemal fest, während sie bei quasilinearen Differentialgleichungen von den jeweiligen Randbedingungen abhängen.

Die Differentialgleichung der Charakteristiken von (12) lautet:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_t} = -\frac{dt}{dx} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}} \quad (13)$$

Für (11) gilt $A = a^2 - \varphi_x^2$, $B = 2\varphi_x$, $C = -1$, also $B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$; die Differentialgleichung (11) ist also hyperbolisch und besitzt reelle Charakteristiken, auf denen ein graphisches Verfahren aufgebaut werden könnte. Die Differentialgleichung der Charakteristiken von (11), die *Riemann-Linien* heißen mögen, lautet nach (13)

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{\varphi_x \pm a} \quad (13a)$$

$$\text{oder, da } -\varphi_x = u, \quad \frac{dx}{dt} = u \pm a, \quad (13b)$$

wo u die Geschwindigkeit in der x -Richtung (v_x).

Aus (13a) ersieht man, daß die Charakteristiken der Differentialgleichung von (11) von den Randbedingungen abhängig sind. Die *Riemann*-Linien sind also nicht für ein graphisches Verfahren zu gebrauchen. Man muß hiezu von den Charakteristiken einer streng linearen Gleichung ausgehen. Eine solche ist mittels *Legendre*-Transformation aus (11) zu gewinnen.

Man setzt: $\varphi_x = -u$, $\varphi_t = -q$, $\Phi = xu + tq + \varphi = \Phi(u, q)$.

$$\text{Es ist: } u = u(x, t), \quad x = x(u, q), \quad u_t = -\varphi_{xt}, \quad q_x = -\varphi_{xt}, \\ q = q(x, t), \quad t = t(u, q), \quad u_x = -\varphi_{xx}, \quad q_t = -\varphi_{tt}$$

und erhält $d\Phi = u dx + q dt + x du + t dq = \Phi_u du + \Phi_q dq$.

Nun ist $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_t dt = -u dx - q dt$,

daher $d\Phi = x du + t dq = \Phi_u du + \Phi_q dq$

und daher $x = \Phi_u(u, q)$, $x_u = \Phi_{uu}$, $t_u = \Phi_{uq}$,
 $t = \Phi_q(u, q)$, $x_q = \Phi_{uq}$, $t_q = \Phi_{qq}$.

Um nun die Ableitungen von φ durch die von Φ auszudrücken, geht man weiter so vor:

$$dx = \Phi_{uu} du + \Phi_{uq} dq, \quad du = -\varphi_{xx} dx - \varphi_{xt} dt \\ dt = \Phi_{uq} du + \Phi_{qq} dq, \quad dq = -\varphi_{xt} dx - \varphi_{tt} dt \quad \text{und nach Kramer}$$

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx \Phi_{uq} \\ dt \Phi_{qq} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_{uu} & \Phi_{uq} \\ \Phi_{uq} & \Phi_{qq} \end{vmatrix}}; \quad dq = \frac{\begin{vmatrix} \Phi_{uu} dx \\ \Phi_{uq} dt \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi_{uu} & \Phi_{uq} \\ \Phi_{uq} & \Phi_{qq} \end{vmatrix}}; \quad \text{also} \\ du = \frac{\Phi_{qq}}{N} dx - \frac{\Phi_{uq}}{N} dt, \\ dq = -\frac{\Phi_{uq}}{N} dx + \frac{\Phi_{uu}}{N} dt$$

$$\text{also } \varphi_{xx} = -\frac{\Phi_{qq}}{N}; \quad \varphi_{xt} = +\frac{\Phi_{uq}}{N}; \quad \varphi_{tt} = -\frac{\Phi_{uu}}{N}.$$

Damit erhält (11) die folgende Form

$$\Phi_{qq} \cdot (a^2 - u^2) + 2u \Phi_{uq} - \Phi_{uu} = 0. \quad (11')$$

Diese Differentialgleichung ist nun streng linear. Aus (8) folgt

$$-q - \frac{1}{2} u^2 = P(a). \quad (8')$$

Mit $A = a^2 - u^2$, $B = 2u$, $C = -1$ folgt aus (13) die Differentialgleichung der Charakteristiken von (11'), die Zustandskurven heißen mögen,

$$\frac{du}{dq} = \pm \frac{1}{a \pm u} \quad \text{oder} \quad \frac{dq}{du} = -(u \pm a). \quad (13'')$$

Für $\frac{du}{dq} \cdot \frac{dx}{dt}$ ergibt sich -1 . Dies bedeutet geometrisch,

daß die Netze der *Riemann*-Linien und der Zustandskurven zu einander reziprok sind. — Zur Integration von $(13^+) \frac{dq}{du} = -(u \pm a)$

wird a durch $(8')$ ausgedrückt, wobei jedoch *vorher* über die Natur des Gases verfügt werden muß. Beim idealen Gas geht die Integration verhältnismäßig einfach durchzuführen; man erhält $q = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$; also Parabeln in der Zustandsebene¹²⁾ (u, q) . Nach einigen Umformungen¹⁾ erhält man hieraus die Gleichungen (14), die aber für jede Art von Gas gültig sind. Wenn man die Rechnung ohne Verfügung über die Natur des Gases durchführen will, dann geht man so vor:

Man schreibt zunächst (13^+) um in: $\mp a du = -dq - u du$.

Nun ist $(8^+) -q - \frac{1}{2}u^2 = P(a)$.

Differentiation dieser Gleichung und Verwendung von (5) $dP = a dH$ liefert

$$-dq - u du = dP = a dH = \mp a du,$$

Division durch dt und Umstellen liefert

$$\frac{d}{dt}(u \pm H) = 0 \quad (14)$$

oder

$$\begin{aligned} u + H &= r, \\ u - H &= l, \end{aligned} \text{ wo } r \text{ und } l \text{ Konstante.}$$

Gleichung (14) stellt die umgeformten Zustandskurven dar, die Zustandsgerade heißen sollen. Ähnliche Gleichungen finden sich schon bei *Riemann*⁵⁾, die dieser auf ganz anderem Wege gewinnt und nicht weiter verwendet. Erweiterungen dieser Gleichungen wurden vom Verfasser bereits veröffentlicht²⁾.

Die Ebene (u, H) heiße die adiabatische Zustandsebene der Wertpaare (u, H) . Diese Ebene entspricht beim bekannten zweidimensionalen, stationären Charakteristikenverfahren von *Prandtl-Busemann*⁸⁾ dem Charakteristikendiagramm (Hauptkurven oder Epizykloiden, s. auch *Sauer*³⁾). Die *Riemann*-Linien entsprechen den *Machschen* Kurven (*Machschen* Linien der linearisierten zweidimensionalen Theorie).

3. Das graphische Verfahren von Schultz-Grunow.

*Schultz-Grunow*⁹⁾ hat für ideale Gase ein einfaches graphisches Verfahren angegeben, das sich auf die durch eine

⁸⁾ *Stodola-Festschrift*, Zürich 1929.

⁹⁾ *S.-G.*, Über die nichtstationäre eindimensionale Gasbewegung. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Bd. 13, Nr. 3, S. 125. Berlin, Mai/Juni 1942.

einfache Kontinuitätsbetrachtung gewonnenen Gleichungen (14) stützt. Er schreibt die Gl. (14) in der Form

$$-\frac{2}{k-1}a + u = -\frac{2}{k-1}a_0 + u_0 = l; \quad (15)$$

$$\frac{2}{k-1}a + u = \frac{2}{k-1}a_0 + u_0 = r.$$

Da die Arbeit von *Schultz-Grunow* in Österreich derzeit schwer greifbar ist und da in ihr die Grundgedanken des folgenden graphischen Verfahrens veröffentlicht sind, soll über diese Arbeit hier kurz referiert werden.

Zeichnet man in ein Koordinatensystem (x, t) (Abb. 1) durch *Riemann-Linien* den raum-zeitlichen Verlauf ungestörter Elementarwellen ein, so bedeutet

$$\cotg \alpha = \dot{w} = \frac{dx}{dt} = \dot{u} \pm \dot{a} \quad (13b, 16)$$

(wegen des \pm -Zeichens s. später) die Geschwindigkeit dieser Elementarwellen. (Das $+$ -Zeichen gilt hiebei für eine nach rechts laufende Welle, das $-$ -Zeichen für eine nach links laufende.)

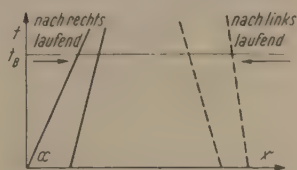


Abb. 1. Ungestörte Elementarwellen in der (x, t) -Ebene.

u ist die Geschwindigkeit eines Gasteilchens relativ zur Wand. Verdichtungswellen () werden, da die nachfolgenden Wellen auf Gebiete mit höherem Druck und damit mit höherer Schallgeschwindigkeit treffen, im (x, t) -Diagramm nach oben hin konvergieren, während Verdünnungswellen () divergieren. Schnitte wie $t = \text{konst} = t_B$ im (x, t) -Diagramm geben die Form der Welle zur Zeit t_B . Für nach rechts laufende Wellen („ r -Linie“ oder *Riemann-Linie* 1. Art)¹⁰⁾ ist r eine variable Größe, während t konstant bleibt; bei einer *Riemann-Linie* 2. Art, die eine nach links laufende Welle darstellt, ist r konstant. Diese Verhältnisse werden im Kap. 4 noch näher erläutert werden. Die verschiedenen Punkte einer nach rechts laufenden Welle werden durch verschiedene r -Werte charakterisiert (und umgekehrt). Bei der Kreuzung¹¹⁾ (Störung, gegenseitigen Durchdringung, Reflexion) nimmt *Schultz-Grunow* für kleine Amplituden Superponierbarkeit an; r und l bleiben nach *S.-G.* auch beim Kreuzen konstant. Da sich aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der r (l)-Werte ändert, erleiden die *Riemann-Linien* eine Änderung der Fortpflanzungsrichtung; sie werden aneinander gebrochen.

¹⁰⁾ Wenn Gasquellen vorhanden sind, sind die r - und l -Linien mit den *Riemann-Linien* nicht mehr identisch; s. 2).

¹¹⁾ *Pfriem*, Zur gegenseitigen Überlagerung gedämpfter ebener Druckwellen großer Schwingungsweite. Akust. Zeitschrift, Bd. 6, 1941.

Aus (15) folgt (für ideale Gase, auf die sich *S.-G.* beschränkt)

$$\Delta u = u - u_0 = -\frac{2}{u-1}(a-a_0) = -\frac{2}{k-1}\Delta a, \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta u = u - u_0 = -\frac{2}{k-1}(a-a_0) = \frac{2}{k-1}\Delta a,$$

also
$$\Delta u = \pm \frac{2}{k-1} \cdot \Delta a. \quad (17)$$

S.-G. verlangt eine Rechengenauigkeit von 20%. Daraus folgt^{4) 9)}, daß Verdichtungsstöße bis zu einem Druckverhältnis von 2,5 adiabatisch behandelt werden dürfen, d. h. man kann sie als stetige Elementarwellen behandeln. Verdichtungsstöße mit größerem Druckverhältnis können dann auch exakt behandelt werden, wenn statt der adiabatischen Zustandsebene die instationäre Stoßpolare¹²⁾ (in Analogie zur stationären Stoßpolare *Busemanns*⁸⁾) zur Verfügung steht.

S.-G. nimmt nun — ähnlich wie *Prandtl* und *Busemann* — an, daß innerhalb der von den *Riemann*-Linien (*Machschen* Kurvenstücken) gebildeten Maschen die Strömung homogen sei und daß die Randlinien der Maschen als Geradenstücke anzusehen sind. — Dem oben erwähnten Druckverhältnis 2,5 entspricht nach der Adiabate für ideale Gase ein Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten $a_2/a_1 = 1,14$ (für Luft). Daraus folgt

$$a_2 - a_1 = \Delta_{\text{ges.}} a = 0,14 a_1 = \frac{\Delta a_{\text{elem.}}}{7,0,02 a_1} (0,02 = 2\%) . \text{ Hiebei bezieht}$$

sich üblicherweise der Index 1 auf den Zustand vor der Welle, 2 auf den Zustand nach der Welle. Durch diese aus der prozentuellen Genauigkeitsforderung folgende Festlegung von $\Delta a_{\text{elem.}}$ folgt aus (17) für $\Delta u = 5 \cdot \Delta a_{\text{elem.}} = 0,1 a_1$ (für Luft, $k = 1,40$).

Die Berücksichtigung von Randbedingungen (z. B. nach einem bestimmten, von außen eingepprägten Gesetz [*Schultz-Grunow*] oder durch die Vorgänge im Gas bewegte Wand [Verf.] oder plötzliche Öffnung eines Hochdruckkessels) erfolgt so, daß die Bewegung der Wand (Kolbenboden, Geschosßboden) in einzelne Beschleunigungsstufen $\pm \Delta u$ aufgelöst wird. Man läßt dann bei einer Verringerung des Gasvolumens von einer Geschwindigkeitszunahmestufe Δu eine Verdichtungsline und von einer Geschwindigkeitsabnahmestufe eine Verdünnungswelle ausgehen. Bei Erweiterung des Gasvolumens gilt das Umgekehrte. Die Steigung (Geschwindigkeit) der *Riemann*-Linien ist gegeben durch w aus (16) wobei nach *S.-G.* u und a die Werte desjenigen Gebietes sind,

¹²⁾ Konstruktionen in der u, q -Ebene finden sich bei *Sauer*, Charakteristikenverfahren für die eindimensionale instationäre Gasströmung, Ing. Arch. XIII (1942), S. 79.

in welches die Welle hineinläuft. Verf. hat sich entschlossen, für diejenigen u - und a -Werte, die zur Berechnung von w dienen, das arithmetische Mittel der u - und a -Werte der Gebiete vor und nach der Welle zu verwenden¹³⁾. Es erweist sich in der Praxis als zweckmäßig, alle Geschwindigkeiten ($w, u, a, \Delta a, \Delta u$) in

Einheiten a_0 zu messen. Es sei $\frac{w}{a_0} = \hat{w}$, $\frac{u}{a_0} = \hat{u}$, $\frac{p}{p_0} = \hat{p}$, $\frac{a}{a_0} = \hat{a}$ etc.

a_0 sei hierbei die „wichtigste Schallgeschwindigkeit“, z. B. bei der Entspannung eines Hochdruckkessels die Schallgeschwindigkeit des Höchstdruckes p_0 . Die Verhältnisse beim Kreuzen werden am besten der Abb. 2 entnommen. Die an sich einleuchtenden Änderungen von a und u können nur auf Grund des Zustandsdiagramms gegeben werden. Die Konstruktion der Steigung erfolgt nach S.-G. am

Abb. 2. Kreuzungsverhältnisse.

besten mit Hilfe eines über dem (x, t) -Diagramm angebrachten Neigungsplanes (Abb. 3). Die gewünschte Steigung wird durch einfache Parallelverschiebung in die (x, t) -Zeichnung übertragen. Abb. 4 zeigt die Richtungsänderung. Der Unterschied zwischen w_{S-G} und $w_{Verf.}$ wurde oben erläutert.

Abb. 3. Neigungsplan.

Schultz-Grunow bringt in seiner Arbeit auch einige praktische Beispiele zur Erläuterung des Verfahrens, z. B.:

1. Ausgleich eines Überdrucks, der in einem zur Zeit $t=0$ geöffneten Rohrherrscht.

Nach den Überlegungen S. 231 unten und S. 232 oben darf der Überdruck nicht größer als $2,5 p_0$ sein. Bei der verlangten Rechengenauigkeit von 2% genügen also 7 Stufen zu seinem Abbau, d. h.

zur Zeit $t=0$ laufen vom Rohrende 7 Verdünnungslinien in das Rohr hinein.

2. Ausströmen aus einem Kessel mit Ansatzrohr. Dieses schon kompliziertere Beispiel soll in einer vom Verf. geplanten

¹³⁾ Das arithmetische Mittel liefert nämlich die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Druckstufe.

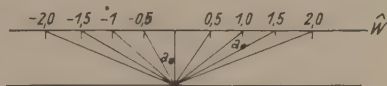


Abb. 3. Neigungsplan.

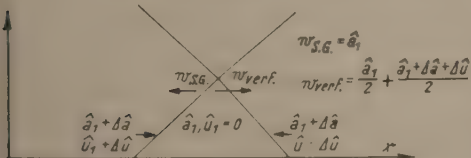


Abb. 4. Richtungsänderung

Arbeit über die gasdynamische Behandlung des inneren Raketenproblems gestreift werden.

3. Eingeprägte sinusförmige Bewegung eines Kolbens in einem auf dem anderen Ende offenen oder geschlossenen Rohr.

4. Die Erweiterung des Verfahrens von Schultz-Grunow.

Die strengen Grundlagen des von *Schultz-Grunow* skizzierten Verfahrens finden sich in den Kapiteln 1 und 2. So sind z. B. die Verhältnisse beim Kreuzen (Abb. 2) auf Grund des Zustandsdiagramms (u, H) leicht zu übersehen; Abb. 5 zeigt dieses

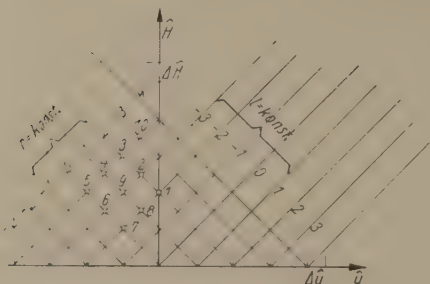


Abb. 5. Zustandsdiagramm.

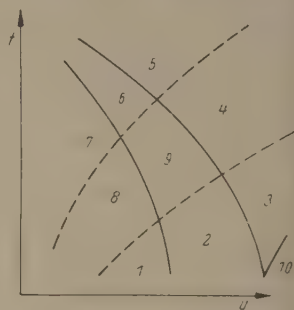


Abb. 6. Strömungsfeld.

Diagramm. Die Zahlen bedeuten bestimmte (u, H) Werte-Paare und stimmen mit den Nummern der Maschen im zugehörigen (x, t)-Diagramm (Abb. 6) überein. Abb. 6 ist nur eine der möglichen Realisierungen des durch das Zustandspunktgitter vorgeschriebenen thermodynamischen Maschenzustandes. Man sieht auf einen Blick, daß in den Maschen 1, 9 und 5 der gleiche Druck herrscht. (p aus H mit Hilfe von (5 Ab)!) In den Maschen 3, 9 und 7 herrscht dagegen die gleiche Geschwindigkeit.

Aus den Abb. 5 und 6 liest man das folgende einfache Rezept ab:

| | |
|---|---|
| Verdichtungsline nach links: längs $r = \text{konst}$ aufsteigen | } auf den Linien des Zustands- diagramms. |
| Verdichtungsline nach rechts: längs $l = \text{konst}$ aufsteigen | |
| Verdünnungsline nach links: längs $r = \text{konst}$ absteigen | |
| Verdünnungsline nach rechts: längs $l = \text{konst}$ absteigen | |

Durch eine einfache Überlegung an Hand des Zustandsdiagramms werden auch die Verhältnisse bei der Reflexion¹⁴⁾ (Abb. 7) verständlich:

$$1: a_1, 0 \quad w_1 = -\frac{a_1 + a_1 + \Delta a}{2} + \frac{\Delta u}{2}$$

¹⁴⁾ *Pfriem*, Reflexionsgesetze für ebene Druckwellen großer Schwingungswerte. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens **41**, 12, 5.

$$2: a_1 + \Delta a, \leftarrow \Delta u$$

$$3: a_1 + 2 \Delta a, 0 \quad w_2 = \frac{a_1 + \Delta a + a_1 + 2 \Delta a}{2} + \frac{\Delta u}{2}$$

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß es von der Begrenzung abhängt, ob eine Verdünnungs-(Verdichtungs-)Linie auch als eine Verdünnungs-(Verdichtungs-)Linie reflektiert wird; dies ist z. B. der Fall bei festen Wänden; bei bewegten Wänden oder bei einem offenen Rohrende kann auch eine Umkehrung des Wellencharakters eintreten. Bei der Reflexion an einer Wand gilt das optische Reflexionsgesetz nicht. Das Reflexionsgesetz ist durch die Bewegung der Wand und das Verhalten des Gases an der Wand¹⁵⁾ bedingt. Die Reflexion einer Elementarwelle an einer bewegten Wand, deren Bewegungsgesetz aus dem Verhalten des Gases bestimmt wird, beeinflusst natürlich die Bewegung der Wand. Die Berücksichtigung von Randbedingungen erfolgt auf folgende Weise. Als mögliche Randbedingungen können auftreten:

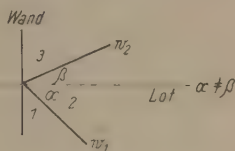


Abb. 7. Reflexionsgesetz an ruhender Wand.

1. Öffnen eines Hahns — Ausgleich des Überdrucks durch ein Loch oder ein Rohr; Bewältigung durch das Zeichnen einer entsprechenden Anzahl von Verdünnungslinien (hinein) und Verdichtungslinien (hinaus), die zur Zeit $t = 0$ (Öffnungszeit) am Rohrende entspringen (s. auch bei *Schultz-Grunow*⁹⁾). Auftreten in der Praxis: Leeren eines Kessels, z. B. bei einfachen Überschallwindkanälen, oder Problem des Raketenantriebs.

2. Ruhende oder nach einem äußeren Gesetz bewegte Wand. Es gilt jedenfalls

$$u_{\text{Gas an der Wand}} = u_{\text{Wand}}.$$

Für eine ruhende Wand gilt die Regel, daß Maschen, deren eine Begrenzungslinie die Wand bildet, die Geschwindigkeit $u = 0$ haben. Auftreten in der Praxis: bewegter Kolben in einem Rohr (Luftpumpen).

3. Bewegte Wand, die durch das dem Gase innewohnende Druckgefälle bewegt wird. Es gilt wieder

$$u_{\text{Gas an der Wand}} = u_{\text{Wand}}.$$

Zur Randbedingung tritt die Bewegungsgleichung der Wand (F ihre Fläche):

$$p \cdot F = m \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad \text{oder mit } \mu = \frac{m}{F} \quad p \Delta t = \mu \cdot \Delta u. \quad (18)$$

¹⁵⁾ *Pfriem*, Zur Frage des Gasdrucks auf bewegte Wände. Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens **42**, 13, 2.

wo μ die Flächenmasse bedeutet. Zur Berücksichtigung dieser Gleichung kann man zwei Wege einschlagen:

A. Man wählt Δu und arbeitet nach dem „Stufenverfahren“ in Anlehnung an *Schultz-Grunow*.

B. Man wählt Δt und baut ein „Streifenverfahren“ auf, das sich besonders bei der Berücksichtigung von Gasquellen als zweckmäßig erweist. Allerdings muß die Rechengenauigkeit in \hat{a} noch extra bestimmt werden.

Bei der Anwendung der Verfahren auf praktische Beispiele ergeben sich erfahrungsgemäß noch verschiedene kleine Spezialprobleme. Um einen Weg zu weisen, wie diese anzupacken sind, soll im folgenden das Hauptproblem der Innenballistik mit dem Stufenverfahren in Angriff genommen werden.

5. Das Hauptproblem der Innenballistik nach dem Stufenverfahren.

Da die Berücksichtigung der Treibstoffverbrennung („Treibstoff“ allgemeiner Ausdruck für Benzin-Luft-Gemische, Pulver, Alkohol-Sauerstoff-Gemische etc.) zwar durch eine Vorarbeit²⁾ vorbereitet, aber in die Verfahren im Rahmen dieser Arbeit noch nicht eingebaut wurde, handelt es sich bei der Lösung des Hauptproblems der Innenballistik bloß um die adiabatische Entspannung eines hochgespannten *Abelschen* Gases, dessen Höchstdruck zur Zeit $t^* = 0$ gegeben sei. Das Projektil wird mit der Gasgeschwindigkeit u (s. Randbedingungen!) „hinausgeweht“. Die Entspannung des durch seine Schallgeschwindigkeit a_0 definierten Höchstdrucks p_0 (hier = Anfangsdruck p_1) beginne ebenfalls zur Zeit $t^* = 0$. Unter Berücksichtigung eines konstanten Einpreßdruckes p_E oder einer dem Druck proportionalen Reibung R schreibt sich Gleichung (18) in der Form

$$\mu \Delta u = \underbrace{(p \cdot p_E)}_{p_{\text{Treib.}}} \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{a_0}, \text{ bzw. } R = c_R \cdot p \cdot F; \quad (18 p_E)$$

$$\mu \Delta u = \underbrace{p(1 - c_R)}_{p_{\text{Treib.}}} \cdot \frac{1}{a_0} \cdot \Delta t \quad (18 R)$$

Da die Entspannung zur Zeit $t^* = 0$ beginnen soll, muß auch die Bewegung des Geschosses zur Zeit $t^* = 0$ beginnen. Dies bedeutet, daß das Geschöß die mittlere Intervallgeschwindigkeit Δu , die es in Wirklichkeit erst im Laufe des Intervalls Δt_n erhält, bereits zur Zeit $t^* = 0$ besitzt. Ferner kommt die folgende Schwierigkeit hinzu: Der Druck, der in der i ten Masche herrscht, ist $p_i(a_i, h_i)$. Dieser Druck wird durch die $i-1$ te Verdünnungslinie ruckartig am Geschößboden am Ende des $(i-1)$ ten Zeitintervalls Δt_{i-1} hergestellt und ist während des i ten Zeitintervalls konstant.

Würde man diesen Druck zur Berechnung des treibenden Drucks $p_{\text{Treib.}}$ verwenden, so würde man eine Ungenauigkeit begehen, da in Wirklichkeit dieser Druck erst gegen das Ende von Δt_i erreicht wird. Zur Berechnung von $p_{\text{Treib.}}$ diene daher ein mittlerer Druck $p_i = \frac{p_{i-1} + p_i}{2}$. Dies

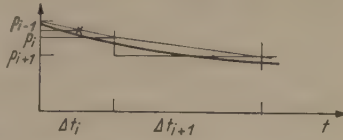


Abb. 8. Druck am Geschosßboden.

stellt natürlich eine Verfeinerung des Verfahrens dar: linearer Abfall des Druckes am Geschosßboden an Stelle unstetiger Sprünge; Approximation von $p(t)$ mittels eines Sehnepolygons an Stelle eines Stufenpolygons (s. Abb. 8). Der durch das Stufenverfahren vorgeschriebene schematische Vorgang ist der folgende (s. Abb. 9):

1. Festsetzung der Rechengenauigkeit: m^0_0 liefert $\Delta \hat{h} = \Delta \hat{u} = 0,0 m$.
2. Festlegung des Höchstdruckes p_1 aus Messungen. a_1 aus Gl. (4b), \hat{h}_1 aus Gl. (5 Ab), $\hat{u}_1 = 0$, $\Delta t_1 = 0$.
3. $\hat{h}_2 = \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}$, $\hat{u}_2 = \hat{u}_1 + \Delta \hat{u}$.
4. \hat{p}_2 aus \hat{h}_2 , \hat{a}_2 aus \hat{p}_2 (Gl. 5 Ab, 4 b).
5. $\hat{w}_{1/2}$ aus $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{u}_1, \hat{u}_2$.
6. Berechnung von p_{II} und $p_{II \text{ Treib.}}$.
7. Berechnung von Δt_2 aus Gl. (18 R).

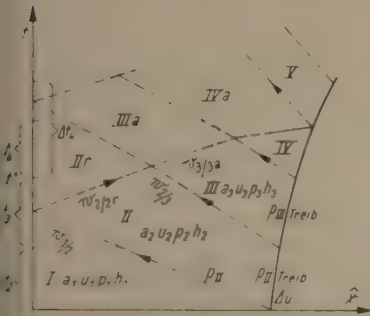


Abb. 9. Hauptproblem der Innenballistik.

8. Die übrigen Schritte verlaufen analog. Beim Auftreffen der Linie IV/IVa zur Zeit Δt_i (gemessen ab t^{++}) innerhalb Δt_4 gilt: $p_{IV \text{ Treib.}} \cdot \Delta t_i + p_{V \text{ Treib.}} \cdot (\Delta t_4 - \Delta t_i) = p$. $\Delta t_4 = p \Delta \hat{u}$, wo p ein Mittel-
druck, der leicht berechnet werden kann (die zwei Daten rechts vom zweiten Gleichheitszeichen sind bekannt). Das Δt_4 wird ebenfalls aus dieser Beziehung bestimmt (vor p !).

Schnitte $t = \text{konst}$ (z. B. t^{++}) geben die räumliche Druckverteilung zur Zeit t^{++} ; man erhält im Gegensatz zur Annahme eines homogenen Drucks (bisherige Innenballistik) „Zellen“ mit verschiedenem homogenen Druck.

Die Lösung des Hauptproblems der Innenballistik ist gegeben durch die graphische Darstellung der Geschosßlebenslinie $x(t)$. Diese gewinnt man, indem man durch das Sehn-

polygon, das das Verfahren liefert, eine glatte Kurve zeichnet. Ihre geometrische Form stimmt mit den $x(t)$ -Kurven, die man aus den gebräuchlichen Formelsystemen der Innenballistik¹⁶⁾ gewinnt, sowie mit Meßergebnissen um so zufriedenstellender überein, je größer das Kaliber (Grenzschicht? Wirbelbildung? Wärmeableitung?) und je schneller das Pulver (Möglichkeit der Vernachlässigung der fortdauernden Verbrennung!) verbrennt. Eine Verbesserung der Ergebnisse wäre nur durch die Berücksichtigung der auch während der Expansion weitergehenden Pulververbrennung zu erzielen. Verf. beabsichtigt, in absehbarer Zeit hierüber zu berichten¹⁷⁾.

¹⁶⁾ *Bollé*, Einführung in die innere Ballistik; *Cranz*, Ballistik.

¹⁷⁾ *Cap*, Über eine Kopplung von Strömungs- und Verbrennungsvorgängen, Österr. Ing.-Archiv, im Erscheinen.

Einfache Methode zur Messung von Dämpfungsänderungen bei Zentimeterwellen.

Von

Elisabeth Maria Philipp, Wien.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 22. Juli 1947.)

Zusammenfassung.

Es wird eine Meßmethode angegeben, die es ermöglicht, mit relativ geringem meßtechnischem Aufwand Dämpfungsänderungen von Hohlraum-Schwingkreisen zu ermitteln. Es wird die bei quasistationären Schwingkreisen übliche Methode der Messung der Spannungsresonanz sinngemäß auf das UKW-Gebiet übertragen. Die Grenzen der Gültigkeit des Verfahrens werden diskutiert.

1. Einleitung.

Im Zentimeterwellen-Gebiet tritt häufig die Frage auf, wie weit die Dämpfung eines Hohlkreises sich ändert, wenn in diesen dielektrische Schichten eingebracht werden. So interessiert die Dämpfungsänderung besonders beim Bau von Röhren, deren Wellenlänge veränderbar sein soll und bei denen z. B. zum Vakuumabschluß isolierende Ringe im elektromagnetischen Feld des Hohlkreises sich befinden. Die Berechnung der Dämpfungsänderung ist nur für relativ einfache Hohlraumformen durchführbar^{1) 2)}, es wird daher in der vorliegenden Arbeit eine einfache Methode angegeben, mit deren Hilfe die Dämpfungsänderung von Hohlkreisen gemessen werden kann.

Die im folgenden beschriebene Methode geht von der Messung der Spannungsresonanz aus. Bekanntlich wird bei einem Serien-Schwingkreis bei festgehaltener Spannung, im Fall der Resonanz, die Größe der Stromamplitude nur durch die Größe des Dämpfungswiderstandes bestimmt. Da nun die Hohlkreise Schwingkreise mit extrem niedriger Dämpfung darstellen und bei schwach gedämpften Kreisen die Höhe der Resonanzkurve bei kleinen Dämpfungsänderungen sich bereits beträchtlich ändert, kann bei der im folgenden beschriebenen Methode mit einem geringen Meßaufwand große Meßgenauigkeit erzielt werden. Es gilt nur, das für quasistationäre Schwing-

¹⁾ F. Borgnis, Phys. Zeitschr. **43**, 284, 1942.

²⁾ E. M. Philipp, Acta Phys. Austr., **3**, 246, 1948.

kreise geltende Meßverfahren der Spannungsresonanz richtig in das Zentimeterwellen-Gebiet zu übertragen.

Von *F. Borgnis*³⁾ wurde ebenfalls eine Methode angegeben, die es ermöglicht, Dämpfungsänderungen an Hohlkreisen zu messen, jedoch setzt seine Methode eine außerordentliche Stabilität des Meßsenders voraus. Es stehen jedoch im allgemeinen Meßsender, die den in dieser Arbeit geforderten Bedingungen entsprechen, nicht zur Verfügung.

2. Meßanordnung.

In Abb. 1 ist die Meßanordnung dargestellt. Die vom Sender abgestrahlte Energie wird durch die konzentrische Leitung *K* weitergeleitet, sie baut im Resonanzfall im Hohlkreis ein

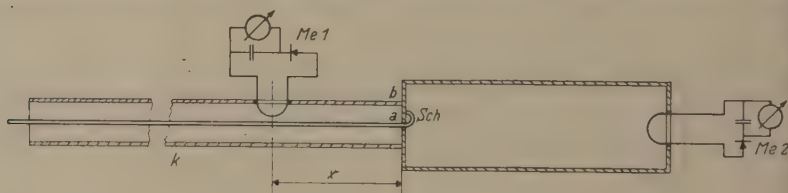


Abb. 1. Meßanordnung.

elektromagnetisches Feld auf. Der Hohlkreis ist mit der konzentrischen Leitung durch die Schleife *Sch* magnetisch gekoppelt. Die Schleife ist z. B. so orientiert, daß im Hohlkreis die elektrische Grundschwingung E_{001} angeregt wird.

Es gilt nun, bei festgehaltener Spannung im Resonanzfall die Größe der Stromamplitude, d. h. die Höhe der Resonanzkurve, zu messen. Aus der Verminderung der Resonanzhöhe beim Einbringen der dielektrischen Ringe in den „leeren“ Hohlkreis kann die Änderung der Dämpfung ermittelt werden.

Die festzuhaltende Spannung wird mit dem Meßsystem *Me 1* kontrolliert, die Höhe der Stromamplitude mit dem Meßsystem *Me 2* gemessen. Hierbei muß beachtet werden, daß der Strom, der am Instrument des Meßsystems abgelesen wird, nicht dem an der Koppelstelle des Meßsystems fließenden proportional ist. Er muß, entsprechend der Charakteristik des Gleichrichters, umgerechnet werden.

Die Meßsysteme sind kurzgeschlossene Lecherleitungen, die magnetisch mit dem Feld der konzentrischen Leitung, resp. mit dem Feld des Hohlkreises gekoppelt sind. Die längs der Lecherleitung transformierte Spannung wird in einem Gleichrichtersystem angezeigt. Die Länge der Meßsysteme muß so bemessen sein, daß ihr Widerstand, bezogen auf die Koppel-

³⁾ Siehe 1).

stelle, praktisch unendlich groß ist; die Meßsysteme dürfen keine Energie aufnehmen und das Feld der konzentrischen Leitung, resp. des Hohlkreises nicht belastet. Die beiden Meßsysteme müssen in ihren Abmessungen und den Charakteristiken der Gleichrichter und Meßinstrumente genau übereinstimmen.

3. Quasistationäres Ersatzschaltbild.

Um das Verhalten eines Hohlkreises besser darstellen zu können, wird das quasistationäre Ersatzschaltbild betrachtet, in welchem die verteilten Kapazitäten, Induktivitäten und Verluste des schwingungsfähigen Hohlraumes durch eine konzentrierte Kapazität, eine konzentrierte Induktivität sowie durch einen Ohmschen Widerstand dargestellt werden. Die Berechnung der Konstanten dieses Ersatzschwingkreises erfolgt aus der Energiegleichung.⁴⁾

Es soll im folgenden als Maß für die Dämpfung eine Größe des Ersatzschaltbildes, der Dämpfungswiderstand, betrachtet werden. Der Dämpfungswiderstand wird als jener Widerstand definiert, in dem der Strom die gleichen Verluste hervorrufen würde wie jene, die im Hohlraum, resp. in Hohlraum und dielektrischem Ring, auftreten.

In Abb. 2 ist das quasistationäre Ersatzschaltbild der gesamten Meßanordnung dargestellt. Der Hohlkreis wird durch die

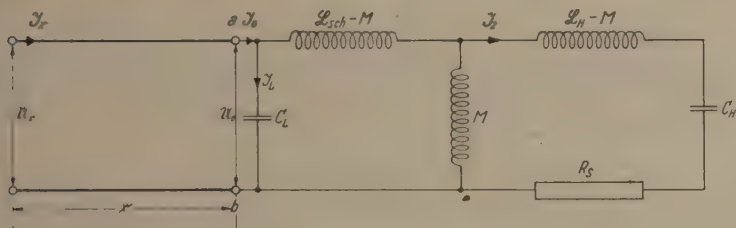


Abb. 2. Quasistationäres Ersatzschaltbild.

Serienschaltung der energetisch definierten Kapazität C_H , der energetisch definierten Induktivität L_H und des Dämpfungswiderstandes R , ersetzt. Es entsprechen im Ersatzschaltbild die Klemmen ab derjenigen Stelle der Meßanordnung, an welcher die konzentrische Leitung an den Hohlkreis anschließt. Die magnetische Kopplung zwischen der konzentrischen Leitung und dem Hohlkreis, die durch die Schleife Sch erfolgt, wird im Ersatzschaltbild als Übertrager dargestellt⁵⁾. Es bedeutet L_{sch} die Induktivität der Schleife und M die Gegeninduktivität.

⁴⁾ H. König, Hochfr. u. El. ak. **58**, 174, 1941.

⁵⁾ W. W. Hansen, J. appl. Physics **9**, 654, 1938.

Die Kapazität C_L im Ersatzschaltbild entspricht der zusätzlichen Kapazität, die durch Verengung des Querschnittes der konzentrischen Leitung beim Anschluß an den Hohlraum entsteht.

Da somit der Zusammenhang zwischen der Meßanordnung und dem quasistationären Ersatzschaltbild klargestellt ist, wird die Wirkungsweise der Meßanordnung an Hand des elektrischen Ersatzschaltbildes näher betrachtet.

Wie bereits eingangs dargestellt wurde, ist bei festgehaltener Spannung \mathfrak{U}_0 im Fall der Resonanz die Größe der Stromamplitude \mathfrak{I}_2 durch die Größe des Dämpfungswiderstandes R , bestimmt. Es gilt allgemein nun den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung aus dem Ersatzschaltbild zu ermitteln. Er ist durch Gleichung 1 gegeben. Diese lautet:

$$\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{I}_2 \left\{ \frac{R_s L_{Sch}}{M} + j \left[\frac{L_{Sch}}{M} \left(\omega L_H - \frac{1}{\omega C_H} \right) - \omega M \right] \right\}. \quad (1)$$

Für den Fall der Resonanz

$$\omega = \omega_0 = \left[\frac{1}{L_H C_H} \cdot \frac{1}{1 - \frac{M^2}{L_H L_{Sch}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

geht Gleichung 1 über in

$$\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{I}_2 R_s \frac{L_{Sch}}{M}. \quad (3)$$

Als Ergebnis folgt somit, daß im Resonanzfall bei festgehaltener Spannung die Höhe der Stromamplitude dem Dämpfungswiderstand R , umgekehrt proportional ist.

4. Diskussion des Meßverfahrens.

Zur Bestimmung der Änderung des Dämpfungswiderstandes von Hohlkreisen könnte nun einfach so vorgegangen werden, daß bei festgehaltener Spannung \mathfrak{U}_0 im Resonanzfall die Änderung der Höhe der Stromamplitude \mathfrak{I}_2 gemessen wird.

Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß mit dem Meßsystem Me 1 die Spannung \mathfrak{U}_0 nicht ohne weiteres gemessen werden kann. Dafür sind die folgenden Gründe maßgebend: Erstens ändert sich beim Einbringen des dielektrischen Materials im allgemeinen auch die Eigenwelle des Hohlkreises. Um diesen wieder auf Resonanz zu bringen, muß die Wellenlänge des Meßsenders verstellt werden, damit ändert sich gleichzeitig die Verteilung von Strom und Spannung in der konzentrischen Leitung. Um bei jeder Meßfrequenz untereinander vergleichbare Werte zu bekommen, kann nicht an den Klemmen $a b$ gemessen werden, da sich an diesen die Strom- und Spannungsphase bei

Änderung der Wellenlänge ändert, es müssen jeweils Werte der gleichen Phase, z. B. die Maximalwerte, miteinander verglichen werden. Das Meßsystem Me 1 muß daher auf der konzentrischen Leitung verschoben werden. Der zweite Grund ist der, daß mit dem Meßsystem Me 1 eine Spannung überhaupt nicht gemessen werden kann. Wie bereits darauf hingewiesen wurde, müssen beide Meßsysteme gleich ausgeführt sein, hiemit ist vorgegeben, daß mit dem Meßsystem Me 1 nur ein Strom gemessen werden kann.

Die Messungen werden somit zwangsläufig in der folgenden Weise durchgeführt: Für den Fall der Resonanz wird mit dem Meßsystem Me 1 das Strommaximum \Im_x auf der konzentrischen Leitung aufgesucht und mit dem Meßsystem Me 2 die Höhe der Stromamplitude \Im_2 gemessen. Nur für den Fall, daß der Zusammenhang zwischen dem Strom \Im_x und der Spannung \mathfrak{U}_0 unabhängig vom Dämpfungswiderstand R_s ist, kann das Meßverfahren richtige Resultate liefern. Dieser Zusammenhang muß erst ermittelt werden, er wird aus den Leitungsgleichungen, wie im folgenden dargestellt ist, berechnet:

$$\mathfrak{U}_0 = \Im_x \frac{\frac{\cos \alpha x}{\Re} - j \frac{\sin \alpha x}{Z}}{\left(\frac{\cos \alpha x}{\Re}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha x}{Z}\right)^2} \quad (4)$$

\Re ... Abschlußwiderstand der konzentrischen Leitung an den Klemmen a, b ,

Z ... Wellenwiderstand der konzentrischen Leitung.

Das Verhältnis $\frac{\mathfrak{U}_0}{\Im_x}$ ist somit vom Abschlußwiderstand \Re der konzentrischen Leitung, also vom Widerstand an den Klemmen a, b , abhängig und dieser kann wieder aus dem Ersatzschaltbild wie folgt berechnet werden:

$$\Re = \frac{1}{R_s} \left[\frac{L_H}{L_{Sch}} - \frac{1}{\omega_0^2 L_{Sch} C_H} \right] - j \left[\omega_0 C_L - \frac{1}{\omega_0 L_{Sch}} \right] \quad (5)$$

$$\left(\frac{1}{R_s} \right)^2 \left[\frac{L_H}{L_{Sch}} - \frac{1}{\omega_0^2 L_{Sch} C_H} \right]^2 + \left[\omega_0 C_L - \frac{1}{\omega_0 L_{Sch}} \right]^2$$

Aus Gleichung 5 ist zu ersehen, daß der Abschlußwiderstand \Re und damit das Verhältnis $\frac{\mathfrak{U}_0}{\Im_x}$ nur dann vom Dämpfungswiderstand R_s unabhängig ist, wenn der erste Klammerausdruck in Zähler und Nenner vernachlässigbar klein wird. Wird dieser Klammerausdruck näher betrachtet, indem man ω_0 aus Gleichung 2 einsetzt, so erhält man:

$$\frac{L_H}{L_{Sch}} - \frac{1}{\omega_0^2 L_{Sch} C_H} = \left(\frac{M}{L_{Sch}} \right)^2. \quad (6)$$

Der erste Klammerausdruck in Zähler und Nenner ist proportional der Gegeninduktivität M . Für den Fall, daß die Kopplung zwischen der konzentrischen Leitung und dem Hohlkreis sehr schwach ist, wird die Gegeninduktivität M verschwindend klein, für diesen Fall wird der Abschlußwiderstand \mathfrak{R} der konzentrischen Leitung zu einem reinen Blindwiderstand

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{j \left(\omega_0 C_L - \frac{1}{\omega_0 L_{Sch}} \right)}$$

der unabhängig vom Dämpfungswiderstand R_s ist.

Das Meßverfahren liefert somit nur dann eindeutige Resultate, wenn die Kopplung zwischen der konzentrischen Leitung und dem Hohlkreis schwach ist. Für diesen Fall, der bei der in Bild 1 dargestellten Meßanordnung praktisch immer vorliegt, kann der Dämpfungswiderstand R_s aus dem Verhältnis der gemessenen Ströme \mathfrak{I}_x und \mathfrak{I}_2 nach den Formeln 3, 4 und 5 gefunden werden:

$$\frac{\mathfrak{I}_x}{\mathfrak{I}_2} = R_s \frac{L_{Sch}}{M} j \left[\frac{\sin \alpha x}{Z} + \left(\omega_0 C_L - \frac{1}{\omega_0 L_{Sch}} \right) \cos \alpha x \right]. \quad (7)$$

Bei festgehaltener Stromamplitude \mathfrak{I}_x ist im Resonanzfall die Höhe der Stromamplitude \mathfrak{I}_2 dem Dämpfungswiderstand R_s umgekehrt proportional. Da \mathfrak{I}_x das Strommaximum darstellt, ist der Abstand x (Abstand des Meßsystem Me 1 von den Klemmen $a b$) immer derjenige Abstand, für den der Klammerausdruck aus Gleichung 7 den Maximalwert erreicht.

Weitere Bemerkungen zum Schema der chemischen Elemente.

Von

Stefan Meyer und Agathe Koss-Rosenqvist, Wien.

(Eingelangt am 11. Oktober 1947.)

Anerkennt man das Entwicklungsprinzip *artgleicher* Elemente (also z. B.: gleicher Massenzahl, gleicher Ordnungszahl *Gg* oder ungleicher Massenzahl und ungleicher Ordnungszahl *Uu* oder *Gu*, bzw. *Ug*¹⁾) mit Zuwachs jeweils bloß um 2 Protonen $+ 2$ Neutronen ($2p + 2n$) einerseits, um ($2p + 4n$) anderseits, so sind damit rein mathematisch bereits alle Existenzmöglichkeiten für „*ladungsgleiche*“ (d. i. gleiche Ordnungszahl Z , = Isotope), „*massengleiche*“ (gleiche Massenzahl M , = Isobare) und „*neutronengleiche*“ (gleicher Überschuß von Massenzahl M gegen Protonenzahl Z , $M - Z = N$, = Isotone) definiert. Welche Stoffe davon stabil oder in natürlich-radioaktiven Substanzen in der Natur vorkommen, lehrt in erster Linie die Massenspektroskopie.

Veranschaulicht ist dies in der Tab. 2 der Mitt. d. Inst. f. Radiumforschung Nr. 456. In ihr sind horizontal fortschreitend die Zuwächse um ($2p + 2n$), vertikal die um ($2p + 4n$) eingezeichnet und sie kann ohneweiters gleichartig anschließend durch die folgende für die natürlich-radioaktiven Stoffe und eventuell die Transurane rechts vom dicken Strich ergänzt werden.

Die Isotope finden sich in den von links nach rechts ziehenden Diagonalen (Beispiele in der Tabelle punktiert).

Die Isobare überspringen jeweils 2 *Gg*- (gleichzeitig *Uu*-) Vertikalreihen (ausgezogene Linien).

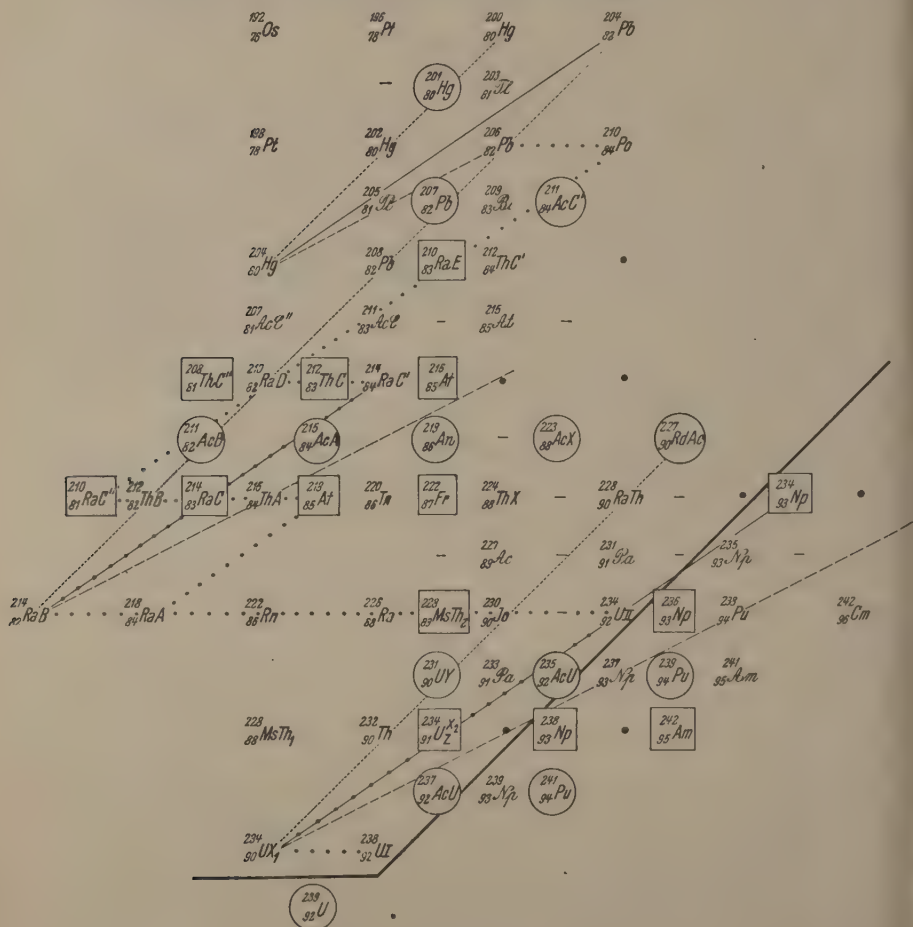
¹⁾ Es ist zweckmäßig, in der Bezeichnung durch große und kleine Buchstaben zwischen Massenzahlen und Ordnungszahlen zu unterscheiden, und mnemotechnisch empfehlenswert, die größeren Massenzahlen mit den großen Buchstaben zu bezeichnen, weil *Gu* und *Ug* nicht gleichbedeutend sind. *Artgleich* heißt jede Kombination *Gg*, *Uu*, *Gu*, *Ug* für sich, *artfremd* Zusammenfügung solcher Stoffe wie *Gg* mit *Gu* etc.

Die Isotone überspringen jeweils 1 *Gg*- (bzw. *Uu*-) Vertikalreihe (gestrichelt).

Die *Ug*-Zwischen-Vertikalreihen sind dabei nicht mitgezählt.

Tabelle 1.

Anschluß zu Tabelle 2 in Mitt. Nr. 456, Acta Physica Austr. II. S. 114, 1948.
Die künstlich erzeugten *U*-Isotope und die radioaktive Descendenz der Transurane sind nicht eingetragen.



Es folgen einander in der Neigung demnach Isotope, Isobare, Isotone, und es gehen von den Eckpunkten links immer alle drei Linien aus, z. B.:

isotop von $^{36}_{16}\text{S}$ nach $^{34}_{16}\text{S}$ nach $^{32}_{16}\text{S}$ isobar von $^{36}_{16}\text{S}$ nach $^{36}_{18}\text{A}$ isoton von $^{36}_{16}\text{S}$ nach $^{38}_{18}\text{A}$ nach $^{40}_{20}\text{Ca}$

Für *artgleiche* Stoffe ist die Entwicklung vom Ausgangselement gleichsam

| | unisono Isotope | octav Isotone | quint Isobare |
|------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| horizontal | je 1 Schritt ($2p + 2n$) | je 2 Schritte $2 \times (2p + 2n)$ | je 3 Schritte $3 \times (2p + 2n)$ |
| vertikal | je 1 Schritt ($2p + 4n$) | je 1 Schritt ($2p + 4n$) | je 2 Schritte $2 \times (2p + 4n)$ |

Unterschied der resultierenden Stoffe unter-

| | | | |
|--------------------|-------|------|-----------|
| einander um | $-2n$ | $2p$ | $2p - 2n$ |
| Zuwachs von Z um | 0 | 2 | 2 |
| Zuwachs von M um | 2 | 2 | 0 |

*J. Mattauch*³⁾ hat in seinen allgemein bekannten „Regeln“ bereits die grundlegenden Beziehungen für Isobare, Isotope und Isotone zusammengestellt⁴⁾.

Sie lassen sich aus der Tab. 2 in Mitt. 456 ohneweiters anschaulich ablesen und auch im allgemeinen auf die natürlich-radioaktiven und Transurane bei Berücksichtigung derer Eigenheiten ausdehnen.

²⁾ Ob es einen physikalisch-chemischen Sinn hätte, rein formal obige Entwicklungen über unisono, octav, quint hinaus gleichsam als

| | quart | terz |
|--------------------|--|-----------------------|
| | 4 Schritte zu ($2p + 2n$) horizontal | 5 Schritte horizontal |
| | 3 Schritte zu ($2p + 4n$) vertikal | 4 Schritte vertikal |
| entsprechend | | |
| unterschieden um | $2p - 4n$ | $2p - 6n$ |
| Zuwachs von Z um | 2 | 2 |
| Abnahme von M um | 2 | 4 |

weiterzuführen, scheint sehr fraglich. Es gäbe solche Stoffe nur für die *Gg*, und zwar nur jedesmal zu zweit und für erstere Art (quart) 33 Möglichkeiten, für die letztere (terz) nur deren 12.

³⁾ Vgl. *J. Mattauch* und *S. Flüge*, Kernphysikalische Tabellen, bei Springer, 1942, S. 88/89.

⁴⁾ Es ist unerwünscht und störend, wenn die gleichen Worte und Bezeichnungen in der Physik für verschiedene Begriffe verwendet werden. „Bar“ und „Millibar“ sind seit langem eingeführte Druckeinheiten, „Isobare“ sind Besitzstand der Meteorologen. „Isotonisch“ heißen Lösungen gleichen osmotischen Druckes. Die Worte *isobar* und *isoton* sind demnach als Bezeichnungen für gleiche Massenzahlen, bzw. gleiche Anzahl von Neutronen nicht sehr glücklich gewählt. Verzichtet man auf Fremdworte, so könnte man für Isobare, Isotone, Isotope einfach „massengleiche“, „neutronengleiche“, „ladungs-“ oder „protonengleiche“ sagen.

Die Mischung der Betrachtung von artfremden Reihen bringt wenig Klärung und schafft oft eher das Gegenteil.

Weit überwiegend sind die *Gg-Elemente*.

Bei ihrer Entwicklung sehen wir zuerst nur Zuwachsschritte um $2p + 2n$ (horizontal), in größerer Folge 10 Schritte von ${}^4_2\text{He}$ bis ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ und 11 Schritte (das Maximum) von ${}^{18}_8\text{O}$ bis ${}^{58}_{28}\text{Ni}$, die sich weiterhin in diesem Ausmaß nur noch in je 10 Schritten für ${}^{70}_{30}\text{Zn}$ bis ${}^{106}_{48}\text{Cd}$ und ${}^{76}_{32}\text{Ge}$ bis ${}^{112}_{50}\text{Sn}$ wiederfinden (Horizontalreihe). Im weiteren Verlauf treten die Zuwachsschritte um $2p + 4n$ (Vertikalreihe) immer stärker in den Vordergrund und in der längsten Folge von ${}^{96}_{44}\text{Ru}$ bis zu ${}^{234}_{90}\text{UX}_1$ gibt es in ununterbrochener Reihe 24 Stoffe.

Es wurde bereits in Mitt. 457 darauf hingewiesen, daß dies ein starkes Argument gegen die Vorstellung vom Aufbau höherer Elemente aus α -Bausteinen ist.

In der Tabelle fallen rechts die sehr seltenen ${}^{184}_{76}\text{Os}$ und ${}^{196}_{80}\text{Hg}$ heraus; die Lücke ${}^{190}_{78}\text{Pl}$ wird damit problematisch. Ihre Existenz mag überprüfungswert erscheinen.

Weit geringer an Zahl sind die *Stoffe vom Typus Uu* und diejenigen von der Kombination *Ug*, die einigermassen untereinander ähnliches Verhalten aufweisen.

Diese Reihen (in der Tab. *Uu* = latein, *Ug* = eingekreist) verlaufen einander ziemlich ähnlich. Zunächst von ${}^3_1\text{H}$ bis ${}^{39}_{19}\text{K}$ und zwischengeschaltet ${}^5_2\text{He}$ bis ${}^{33}_{16}\text{S}$ in Horizontalreihen um $(2p + 2n)$ ansteigend. Diese erste Horizontal-*Uu*-Reihe hat 10 Folgestoffe, die entsprechende *Ug*-Reihe deren 8. Bei der weiteren Entwicklung beginnen wiederum die Vertikalreihen vorzuherrschen.

Unter den *Ug* ist die maximale Zahl der Folgeschritte um $2p + 4n$ in den Vertikalreihen bei ${}^{147}_{62}\text{Sm}$ bis ${}^{237}_{92}\text{AcU}$ 11 (und + 5 Lücken = 16); unter den *Uu* bis 11 (samt Lücken).

Im weiteren Verlauf gibt es zur Entwicklung $(2p + 2n)$ (horizontal) nur mehr wenige Folgestoffe, im Maximum 5 für *Ug* bei ${}^{49}_{22}\text{Ti}$ bis ${}^{61}_{28}\text{Ni}$; ${}^{83}_{36}\text{Kr}$ bis ${}^{99}_{44}\text{Ru}$ und radioaktiv ${}^{211}_{82}\text{AcB}$ bis ${}^{227}_{90}\text{RdAc}$ und für *Uu* analog maximal sogar nur 4 derartige Folgestoffe bei ${}^{51}_{23}\text{V}$ bis ${}^{63}_{29}\text{Cu}$ und ${}^{81}_{35}\text{Br}$ bis ${}^{93}_{41}\text{Nb}$, welches letzteres sich bei Ausfüllung der Lücke von ${}^{97}_{43}\text{Ma}$ auf 5 erhöhen würde, und endlich, wenn 3 Lücken ausgefüllt würden, sogar 6 Folgestoffe von ${}^{87}_{37}\text{Rb}$ bis ${}^{107}_{47}\text{Ag}$.

Die exponierte Stellung von ${}^{87}\text{Rb}$ weist auf Besonderheiten.

Bei natürlichen Stoffen ist jeder Platz nur *einmal* besetzt. Die *einzige* Ausnahme für „Kernisomere“ (= gleiche Massenzahl und gleiche Ordnungszahl = „Isobartope“) findet sich für UX_2 und UZ mit $M = 238$, $Z = 91$.

Die *Lücken* in der Tabelle sind nicht zahlreich (im folgenden nicht gesicherte Lücken in Klammern angeführt); zentrale selten, Randlücken als Hinweis für das Fehlen von Stoffen minder sicher.

Für die *Gg-Stoffe* finden sich solche für

$^{88}_{41}\text{Zr}$; $^{90}_{38}\text{Sr}$; $^{118}_{52}\text{Te}$; $^{140}_{56}\text{Ba}$; $^{144}_{58}\text{Ce}$; ($^{190}_{78}\text{Pt}$) ferner für $^{140}_{60}\text{Nd}$; $^{146}_{62}\text{Sm}$; (herausfallend $^{144}_{62}\text{Sm}$) und für ($^{106}_{44}\text{Ru}$); ($^{112}_{46}\text{Pd}$); ($^{118}_{48}\text{Cd}$); ($^{150}_{64}\text{Gd}$); ($^{156}_{66}\text{Dy}$) sowie unter den natürlich-radioaktiven Stoffen und Transuranen für

($^{216}_{86}\text{Em}$); ($^{218}_{86}\text{Em}$); ($^{222}_{88}\text{Ra}$); ($^{232}_{92}\text{U}$); ($^{236}_{92}\text{U}$); ($^{236}_{94}\text{Pu}$); ($^{240}_{94}\text{Pu}$) (radioaktiv-genetisch vielleicht untereinander zusammenhängend).

Für die *Ug-Stoffe*:

$^{37}_{18}\text{A}$; ($^{39}_{18}\text{A}$); $^{107}_{46}\text{Pd}$; ($^{121}_{52}\text{Te}$); ($^{127}_{54}\text{X}$); ($^{133}_{56}\text{Ba}$); ($^{139}_{58}\text{Ce}$); ($^{141}_{58}\text{Ce}$); $^{151}_{62}\text{Sm}$; ($^{153}_{64}\text{Gd}$); ($^{159}_{66}\text{Dy}$); ($^{165}_{68}\text{Er}$); $^{193}_{78}\text{Pt}$; $^{205}_{82}\text{Pb}$

und die radioaktiven Isotope:

($^{213}_{84}\text{Po}$); ($^{217}_{86}\text{Em}$); ($^{225}_{88}\text{Ra}$); ($^{229}_{90}\text{Th}$); ($^{233}_{92}\text{U}$); ($^{237}_{94}\text{Pu}$).

Für die *Uu-Stoffe* fehlen:

($^{91}_{39}\text{Y}$); ($^{95}_{41}\text{Nb}$); ($^{97}_{43}\text{Ma}$); ($^{99}_{43}\text{Ma}$); ($^{105}_{45}\text{Rh}$); ($^{111}_{47}\text{Ag}$); ($^{117}_{49}\text{In}$); ($^{119}_{51}\text{Sb}$); ($^{125}_{53}\text{J}$); ($^{131}_{55}\text{Cs}$); $^{137}_{57}\text{La}$; $^{143}_{59}\text{Pr}$; $^{147}_{61}\text{Il}$; $^{157}_{65}\text{Tb}$; $^{163}_{67}\text{Ho}$; $^{199}_{79}\text{Au}$ und radioaktiv $^{221}_{87}\text{Fr}$.

Gu-Stoffe gibt es bekanntlich als stabile nur:

^2_1H ; ^6_3Li ; $^{10}_5\text{B}$; $^{14}_7\text{N}$, über deren mit der Ordnungszahl steigende Stabilität schon in Mitt. Nr. 456 einige Worte gesagt wurden. Ihre relative Häufigkeit (Stabilität) nimmt in der gegebenen Reihenfolge rapid zu, dann schließt diese Art Entwicklung völlig ab. Danach beginnt mit O ein neues Entwicklungsprinzip unter erstem Auftreten der Zuwächse um $(2p + 4n)$ (vertikal). Das führt möglicherweise zu einer tieferen Begründung für die sonst rein empirische, aber praktisch vielfach bewährte Wahl von Sauerstoff statt Wasserstoff als Basis für die Atomgewichte. Alle übrigen existenten *Gu-Stoffe* sind radioaktiv, das sind zunächst eingesprengt unter die stabilen: $^{40}_{19}\text{K}$ und $^{176}_{71}\text{Cp}$.

Weiter gehören hierher die radioaktiven Stoffe, bei denen die *Ug* hauptsächlich erst auftreten, zu den Ordnungszahlen 81 bis 95. Die Tabelle weist unter den letzteren vielleicht noch auf das Fehlen von Isotopen: $^{226}_{89}\text{MsTh}_2$; $^{230}_{91}\text{Pa}$; $^{232}_{91}\text{Pa}$.

Andere Lücken sind hier nicht vorhanden.

Die Existenz anderweitiger β -Strahler nebst K, Rb, Cp unter den natürlichen Stoffen mit Ordnungszahlen unterhalb 81 ist nach dem Schema der Tabelle nicht vorauszusehen, wenn nicht außer Sm (das ein β -strahlendes Nd als Folgeprodukt

erwarten läßt) noch andere α -Strahler entdeckt werden, auf welche Möglichkeit ausführlicher in Mitt. Ra-Inst. Nr. 457 hingewiesen wurde.

Außer den in der Natur selbständig vorkommenden $_{92}^{238}\text{U}$ und $_{90}^{232}\text{Th}$ sind alle Stoffe hoher Ordnungszahl bis herunter zu $_{83}^{210}\text{RaE}$ und $_{84}^{210}\text{Po}$ sowie $_{81}^{210}\text{RaC''}$, $_{81}^{208}\text{ThC''}$ und $_{81}^{207}\text{AcC''}$, wahrscheinlich auch die Bleiarten der Massen 206, 207, 208, nur als *Abbauprodukte* der erstgenannten vorhanden. Ob das auch für $_{82}^{204}\text{Pb}$ gilt, ist noch fraglich.

Die Ultraurane $Z=93, 94, 95, 96$ sind bisher nur als künstliche Aufbauprodukte bekannt, ein natürliches Vorkommen kann aber bei den vorhandenen Isotopen von sehr großen Lebensdauern nicht als ausgeschlossen gelten.

Die ganze Frage der Klärung des Gegenlaufes von Aufbau und Abbau der Grundstoffe in der Lebensgeschichte der Erde und der anderen Himmelskörper bleibt noch der Zukunft vorbehalten.

Es ist, wie erwähnt, nicht unbedingt geboten, bei der Diskussion des Aufbaus der Grundstoffe die natürlich-radioaktiven wegzulassen und sich auf die stabilen zu beschränken. Die Komplikation, welche bei den radioaktiven auftritt, besteht im wesentlichen in dem Vordrängen nach links in der Tabelle von ThC'' herunter, AcB , AcA und weiter bis RaB , RaA und allgemein dem Auftreten der *Gu*-Stoffe. Dazu kommt noch eventuell der Vorstoß nach rechts durch die Transurane, die man hier auch weglassen könnte, weil es fraglich ist, ob sie, außer künstlich erzeugt, in der Natur vorkommen, bzw. vorkamen.

Im übrigen schließen sich die radioaktiven Familien in der Tabelle den anderen natürlichen Stoffen gut an, und die „*Mattauch-Regeln*“ haben für sie auch vielfach Geltung. In der Tabelle ist der radioaktive Zerfallsgang bloß für die U-Ra-Familie durch Punktierung angedeutet, um nicht durch zu viele Linien das Bild zu verwirren.

Die Mattauch-Regeln.

Isobarenregeln:

ad a). „Es gibt keine stabilen Isobarenpaare, deren Ladung sich nur um eine Einheit unterscheidet.“

Als Ausnahmen führt bereits *Mattauch* an: zu $M=113$ Cd-In, zu 115 In-Sn, zu 123 Sb-Sn, zu 187 Re-Os.

Es scheint beachtenswert, daß es sich dabei ausschließlich um Kombinationen der untereinander bestenfalls verschwägerten, aber sonst verschiedenen Familien *Ug* und *Uu* handelt. Zudem ist es bemerkenswert, daß in der Tabelle $_{50}^{115}\text{Sn}$ bei den *Ug*

sowie $^{123}_{51}\text{Sb}$ bei den *Uu* aus dem Rahmen ihrer Familien herausfallen wie Findlinge.

Unter den radioaktiven Stoffen gibt es infolge der β -Zerfälle vielfach Isobare mit Unterschieden um 1 Einheit der Ordnungszahl, und zwar für die geraden Massen 208 bis 218 und 222, 228, 234, 238 und (242), und die ungeraden: 211, 227, 231, 237, (239, 241). (Transurane eingeklammert.)

ad b). „Kerne gerader Massenzahl haben stets gerades Z und N (*Gg*-Typ). Meist gibt es mehrere Isobare.“

Unter den stabilen *Gg* gibt es überwiegend bloß je 2 Isobare. Nur $^{96}_{40}\text{Zr} - ^{96}_{42}\text{Mo} - ^{96}_{44}\text{Ru}$; $^{124}_{50}\text{Sn} - ^{124}_{52}\text{Te} - ^{124}_{54}\text{X}$; $^{130}_{52}\text{Te} - ^{130}_{54}\text{X} - ^{130}_{56}\text{Ba}$; $^{136}_{54}\text{X} - ^{136}_{56}\text{Ba} - ^{136}_{58}\text{Ce}$ haben deren 3.

Keine Isobare haben die *Gg* mit den Massen unter 34, dann 38, 42, 44, 48, 52, 56, 60, 62, 66, 68, 72, 88, 90, 118, 140, 146, 156, 166, 172, 178, 182, 188, 190, 194, 200, 202, 206, 220, 224, 226, 230, 236, (240).

Dies ist in der Tabelle dadurch begründet, daß die dazu erforderlichen horizontalen Dreier-Schritte den Rahmen des Elementenbildes überschreiten würden.

Die Magerkeit der Familien *Uu* und *Ug* verhindert aus dem gleichen Grunde das Auftreten von Isobaren innerhalb dieser bei den einzelnen Familien. Kombiniert zwischen den beiden Arten gibt es Isobare nur bei den Massen: 207, 215, 227, 231, 235, (237, 241).

Mehr als 2 Isobare gibt es auch bei den radioaktiven Stoffen, selbst bei Kombination mehrerer Familien, selten, und zwar:

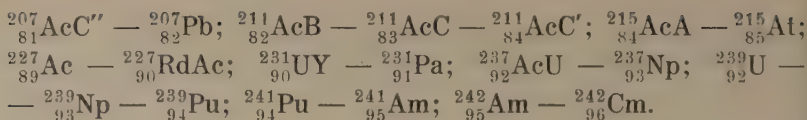
4 für die Massenzahl 210 und bei Einschluß von $^{234}_{93}\text{Np}$ 234, jeweils ineinandergeschoben 2 *Gg* + 2 *Gu*;

3 für die Massenzahlen 211 (ebenso 239), und zwar 2 *Ug* + 1 *Uu*, sodann für 212, 214, 228, 238 mit je 2 *Gg* + 1 *Gu*.

Es mag hier auch erwähnt werden, daß die Tabelle erkenntlich macht, warum der längeren α -Zerfallsfolge von *Ull* herunter bis zu *RaA*-*RaB* (und analog für die *Th*- und *Ac*-Familien) mit den *B*-Produkten ein Ende gesetzt wird. Ein weiteres Hinausdrängen der Stoffe nach links erscheint schematisch untunlich.

ad c). „Zu ungeraden Massenzahlen gibt es keine Isobare ungerader Ladungszahl.“

Das gilt, wie *Mattauch* betont, für stabile Stoffe ausnahmslos. Ausnahmen sind auch für die radioaktiven Stoffe selten und kommen nur in der Actiniumfamilie und bei Transuranen vor:



Isotope.

Die Anordnung der Tabelle, in der die Isotope in den Diagonalen stehen, zeigt unmittelbar, daß sie wesentlich häufiger sind als die Isobare, was bei den näheren Schritten der Entwicklung vorgegeben erscheint. Tatsächlich gibt es singuläre Stoffe ohne weitere Isotope nur für die Ordnungszahlen $Z=9, 11, 13, 15, 21, 23, 25, 27, 33, 39, 41, 45, 53, 55, 57, 59, 65, 67, 69, 73, 79$, die alle ungerade sind. Zu sämtlichen geraden Z gibt es, bis hinauf zu $Z=96$, Isotope.

Am häufigsten sind sie, der ausgedehnteren Breite in der Tabelle entsprechend, bei den *Gg-Stoffen*.

Bei diesen gibt es:

- 2 Isotope für $Z=8, 10, 12, 14$ sowie 86, 92, (96), wobei Lücken in der Tabelle für die letzteren drei eine Anzahl: 6 bis 7. Vermehrung erwarten lassen.
- 3 Isotope für $Z=16, 18, 22, 24, 26, 38$ sowie 88 und vielleicht (94), wobei für die letzten zwei die Anzahl: 7 bis 8. Lücken noch nicht geklärt sind.
- 4 Isotope für $Z=20$ (wenn nicht ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ das auf 5 erhöht), 28, 30, 32, 40, 58, 66, 72, 74, 78, vielleicht samt Lücken 86, 92, (94) und 90, das Anzahl: 11 bis 14. samt Lücke auf 5 steigen könnte.
- 5 Isotope für $Z=(20), 34, 36, 42, 44, 46, 56, 60, 62, 64, 68$, Anzahl: 15 bis 16. 70, 76, 80, 84, (90).
- 6 Isotope für $Z=48, 52, 82$. Anzahl: 3.
- 7 Isotope für $Z=50, 54$. Anzahl: 2.

Die Maximalzahl der Isotope befindet sich demnach gar nicht unter den radioaktiven Stoffen (Z von 81 aufwärts), wo sie zuerst aufgefunden wurden.

Innerhalb der *Art Uu* finden sich Isotope selten, und zwar je 2 bei $Z=1, 17, 19, 29, 31, 35, 37, 47, 49, 51, 63, 75, 83, 91, (93)$, 3 an der Zahl bei $Z=81$ und (93).

In der *Art Ug* gibt es:

- 2 Isotope bei $Z=22, 42, 44, 48, 52, 54, 56, 60, 62, 64, 66, (68), 70, 72, 76, 80, 82, 84, (88), (90), (94)$.

3 Isotope gehören zu $Z=50$ und 92, vielleicht zu 84, 90, (94), und zu $Z=92$ könnte es bei Lückenausfüllung sogar 4 geben. Die Transurane brauchen aber nicht beigezogen werden.

Kombiniert man die Arten, so steigt die Zahl der Isotope bis 10.

7 Isotope finden sich dann bei $Z=42, 44, 56, 60, 62, 64, 68, 70, 76, 80, 84$, vielleicht (94).

8 Isotope bei $Z=48, 52, 82$, vielleicht 84, 90, 92.

9 Isotope bei $Z=54$.

10 Isotope bei $Z=50$.

Isotone.

Die Art der Anordnung der Isotone und deren Verhalten ist der bei den Isotopen ähnlich, weshalb *Mattauch* auch die Regeln für diese beiden einander gegenüberstellt. Wie erwähnt, stehen sie zueinander aber eher wie Grundton zu Octave.

Sie werden in der Tabelle gefunden durch je 1 Schritt abwärts und 2 waagrechte, und zwar für artgleiche in Schritten zu $2p+2n$ horizontal und solchen zu $2p+4n$ vertikal; in der seltenen Kombination für $N=2$ bis 8 für untereinander artfremde Stoffe (*Gg* und *Uu*, bzw. *Gu* und *Ug*) je 2 Isotone durch Halbschritte von $1p+2n$ abwärts und zweimal $1p+1n$ seitlich.

Zu allen geradzahligem N bis $N=146$ hinauf gibt es Isotone.

Hierbei nehmen noch die *Gg* in ihre Mitte von $N=10$ an *Uu*-Stoffe auf; zumeist nur einen, jedoch zwei bei $N=20$ in $^{37}_{17}\text{Cl}$ und $^{39}_{19}\text{K}$, für $N=50$ $^{87}_{37}\text{Rb}$ (wo Besonderheiten vorliegen) und $^{89}_{39}\text{Y}$; für $N=82$ in $^{139}_{57}\text{La}$ und $^{141}_{59}\text{Pr}$; für $N=126$ in $^{207}_{81}\text{AcC''}$ und $^{209}_{83}\text{Bi}$ (für $N=142$ in $^{233}_{91}\text{Pa}$ und $^{235}_{93}\text{Np}$), wie dies durch die Ineinanderschachtelung der Familien *Gg* und *Uu* in der Tabelle unmittelbar aufgedeutet werden kann.

Damit ist auch schon gesagt, daß es unter den stabilen *Uu* selbst nur für $N=20, 50, 82$ und bei den radioaktiven für $N=126$ (und 142) Isotone gibt.

Die Anzahl der Isotone erreicht für die *Gg* nur für $N=82$ den Betrag von 5.

4 Isotone gibt es in dieser Type für $N=28, 50, 56, 58, 74, 78$.

Bei Hinzunahme der zu *Gg* artfremden gibt es:

7 Isotone bei $N=82$,

6 „ nirgends,

5 „ bei $N=20, 28, 50, 58, 74, 78$,

4 „ bei $N=30, 40, 42, 44, 46, 48, 52, 56, 60, 62, 64, 70, 72, 88, 90, 94, 98, 108, 116, 126, 142, 146$,

im übrigen nur 3 oder 2.

Zu *ungeradzahligen* N gibt es im allgemeinen keine Isotone, wie dies schon *Mattauch* betont. Er erwähnt auch die Ausnahmen für $N=55, 65, 85$.

Es handelt sich um *Ug*-Stoffe. Die Tabelle (*Acta Phys. Austr. II. S. 113*) zeigt, daß für

$N=55$ $^{97}_{42}\text{Mo}$ — $^{109}_{44}\text{Ru}$ dies Eckpunkte der *Ug*-Entwicklung sind,

$N=65$ $^{113}_{48}\text{Cd}$ — $^{115}_{50}\text{Sn}$ $^{115}_{50}\text{Sn}$ im Schema herausfällt,

$N=85$ $^{145}_{60}\text{Nd}$ — $^{147}_{62}\text{Sm}$ $^{147}_{62}\text{Sm}$ im Schema herausfällt.

Die Ausnahmen vermehren sich bei den radioaktiven Stoffen, zunächst für $N=105$ mit $^{176}_{71}\text{Cp}$ — $^{177}_{72}\text{Hf}$, das das *Gu*-Element *Cp* enthält, und überhaupt für alle *Gu*-Elemente mit $N=3, 5, 7$ und ab $N=127$ bis 145 mit Ausnahme von $^{41}_{19}\text{K}$ und $^{228}_{89}\text{MsTh}_2$, zu denen bisher Isotone noch fehlen.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, wie eine in Mitt. d. Inst. f. Radiumforschung Nr. 456 vorgebrachte neue Anordnung der chemischen Elemente Vorhandensein und Art der „ladungsgleichen“ (Isotope), „neutronengleichen“ (Isotone) und „massengleichen“ (Isobare) veranschaulicht. Dabei wird auf gewisse Gesetzmäßigkeiten sowie auf zutage tretende Lücken einerseits, auf Besonderheiten herausfallender Elemente anderseits hingewiesen. Die Tabelle regt Überprüfungen an für die Lücken und auch für die Existenz oder die Eigenart speziell von $^{41}_{20}\text{Ca}$; $^{87}_{37}\text{Rb}$; $^{117}_{51}\text{Sn}$; $^{125}_{51}\text{Sb}$; $^{186}_{51}\text{X}$; $^{147}_{62}\text{Sm}$; $^{184}_{74}\text{Os}$; $^{196}_{80}\text{Hg}$.

Die Abhängigkeit der Röntgen-Kleinwinkelstreuung von Form und Größe der kolloiden Teilchen in verdünnten Systemen, IV¹⁾.

Von

Günther Porod.

Institut für theoretische und physikalische Chemie der Universität Graz.

Mit 10 Abbildungen.

(Eingelangt am 14. Oktober 1947.)

Problemstellung.

Die Beugung von Röntgenstrahlen an dispersen Systemen kann dazu verwendet werden, um zu Aussagen über Größe und Form der dispergierten Teilchen zu gelangen. Die historische Entwicklung und der derzeitige Stand der sogenannten Kleinwinkelforschung sind in den zwei vorangehenden Mitteilungen dieser Reihe ausführlich behandelt. Die vorliegende Arbeit soll die Theorie der Kleinwinkelstreuung insofern ergänzen und abrunden, als versucht wird, eine exakte Methode zur Berechnung der Streukurven verschieden geformter Teilchen zu entwickeln. Da die grundsätzlichen Erscheinungen, vor allem der innere Zusammenhang mit der Röntgenbeugung an Gasen, bereits Gegenstand der o. g. Arbeit ist, können wir uns ohne lange Einleitung unserer Aufgabe zuwenden. Als erstes ist es angebracht, die Voraussetzungen aufzuzeigen, auf denen die Berechnung der Röntgenstreuung aufgebaut werden soll.

Zunächst wird im folgenden nur die kohärente Streuung berücksichtigt. Die Vernachlässigung der inkohärenten (*Compton*-) Streuung ist in unserem Falle um so mehr gerechtfertigt, als es sich nur um sehr kleine Beugungswinkel handelt. Aus demselben Grunde brauchen Atomformfaktoren und Polarisationsfaktor nicht berücksichtigt zu werden. Ferner wird vom Einfluß der Absorption abgesehen. Die Voraussetzungen sind also dieselben, wie sie der geometrischen Theorie der Kristallinterferenzen zugrunde liegen, nur daß die Kleinheit der auftretenden

¹⁾ III. Mitteilung, O. Kratky und G. Porod, Acta Physica Austriaca. Im folgenden angeführt als I. c. III.

Ablenkungswinkel teils den Anwendungsbereich erhöht, teils neue Vereinfachungen zuläßt.

Die räumliche Verteilung der Streuzentren (Elektronen) denken wir in Anschluß an *Guinier*²⁾ gleichmäßig über das ganze Teilchenvolumen verschmiert. Der Vorgang der Röntgenstreuung stellt sich dann so dar, daß von jedem Volumelement des durchstrahlten Teilchens eine kohärente Streuwelle ausgeht, deren Amplitude der Anzahl der im Volumelement verschmierten Elektronen, d. h. dem Volumelement selbst proportional ist. Die Überlagerung dieser Streuwellen gibt bei genügend kleinen (kolloiden) Teilchen eine resultierende Streuung, die mit dem Abbeugungswinkel sehr rasch abfällt. Außerdem ist sie noch von der Lage des Teilchens relativ zum Strahlengang abhängig. Die tatsächlich beobachtete Streuung ist natürlich eine Überlagerung außerordentlich vieler solcher Einzelstreuungen. Wir beschränken uns dabei auf die Behandlung verdünnter, homodisperser Systeme, d. h. die Teilchen der dispersen Phase sollen von gleicher Form und Größe, aber völlig unabhängig in bezug auf Lage sein.

Die absolute Intensität der Streuung hängt nicht vom chemischen Aufbau des Systems, sondern nur von der Differenz der Elektronendichten des Dispersionsmittels und der dispersen Phase ab; u. zw. geht sie, wie empirisch festgestellt wurde³⁾, proportional der dritten Potenz der Elektronendichtendifferenz, während die Theorie bei homogenen Phasen Proportionalität mit der zweiten Potenz fordert. Es wurde versucht, diese Abweichung durch Inhomogenität des betrachteten Systems zu erklären³⁾. Da wir nur relative Intensitäten betrachten, können wir davon absehen und uns auf rein geometrische Eigenschaften des Systems beschränken. Um kurz zu wiederholen, sollen also bei den nachstehenden Untersuchungen folgende Voraussetzungen gelten:

1. Inkohärente Streuung und Absorption sind zu vernachlässigen (geometrische Theorie).
2. Die kohärente Streuung geht gleichmäßig vom ganzen Volumen des Teilchens aus.
3. Es werden nur verdünnte, homodisperse Systeme betrachtet.

Unser Ziel ist die Berechnung der Streufunktion, d. h. der Abhängigkeit der abgebeugten Intensität vom Beugungswinkel 2ϑ . Solange wir nur den Formeinfluß diskutieren wollen, können wir vom Ordinatenmaßstab ganz absehen und die Intensität beim Winkel $\vartheta = 0$ willkürlich gleich eins setzen. Die so normierte Streufunktion wird im folgenden immer mit Φ bezeichnet.

²⁾ A. Guinier, Thèses, Serie A, 1854 (1939).

³⁾ O. Kratky und A. Wurster, Z. Elektrochem. **50**, 249 (1944).

Später wird es sich als notwendig erweisen, auch dem Einfluß der Teilchengröße auf die Streuintensität durch Einführung einer etwas modifizierten Funktion Φ Rechnung zu tragen.

Methoden zur Berechnung der Streukurven.

Für unsere Zwecke stehen uns drei Wege zur Verfügung.

1. Berechnung der Streuamplitude und Mittelung über alle Lagen.

Erstens können wir, der obenstehenden Beschreibung des Streuvorganges folgend, für ein Teilchen in bestimmter Lage die resultierende Amplitude berechnen. Da in einer Lösung sehr viele Teilchen in verschiedener Lage vorhanden sind und außerdem jedes Teilchen im Laufe der Zeit alle möglichen Lagen einnimmt, ist noch der Mittelwert der Intensitäten, also Amplitudenquadrate, zu bilden.

Ein einfallender Strahl \vec{i}_0 werde in der Richtung \vec{i} abgelenkt. Ein Punkt mit dem Ortsvektor \vec{r} hat dann eine Phasendifferenz $\frac{2\pi}{\lambda} (\vec{i} - \vec{i}_0) \cdot \vec{r}$. Diese hängt also nur von der Projektion des Ortsvektors auf die Strahlensymmetrale ab. Für alle Punkte einer normal dazu liegenden Ebene ist demnach die Phasendifferenz dieselbe. Wir können den Strahlengang formal als Reflexion an einer fiktiven Spiegelebene auffassen (wie es in der Theorie der Kristallinterferenzen üblich ist). Denken wir uns nun den Körper in lauter unendlich dünne Schichten parallel zur Spiegelebene zerschnitten, dann brauchen wir nur noch die Phasendifferenz in Richtung der Normalen zu berücksichtigen. Eine Schicht im Abstand r vom Mittelpunkt mit der Fläche $F(r)$ gibt eine Amplitude $dA \sim F(r) \cos \frac{2\pi}{\lambda} r 2 \sin \vartheta \cdot dr$. Die resultierende Amplitude wird dann:

$$A = \frac{1}{V} \int F(r) \cos \frac{4\pi}{\lambda} \vartheta r \cdot dr, \quad V = \text{Volumen} \quad (1)$$

wobei wir den Sinus durch den Winkel ersetzt haben, was bei der Kleinheit der auftretenden Winkel ohne weiteres erlaubt ist.

Durch den Faktor $\frac{1}{V}$ erreichen wir, daß A für $\vartheta = 0$ den Wert 1 annimmt.

Formel (1) gibt uns die Amplitude für eine bestimmte Lage des Teilchens gegenüber der Spiegelebene mit dem infinitesimalen Raumwinkelbereich $d\Omega$. Für die Streufunktion erhalten wir:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int A^2 d\Omega. \quad (2)$$

Dieser zweite Schritt ist wesentlich schwieriger auszuführen. An ihm scheitert eine allgemeine Anwendung dieser Methode. Wir werden sie nur für einen Spezialfall (Ellipsoide) heranziehen.

2. Abstandsfunktion.

Eine zweite Methode geht von der *Debyeschen* Theorie der Gasinterferenzen aus. Sie wurde erstmalig auf ein ähnliches Problem (aus Kugeln zusammengesetzte Gebilde) angewendet von *O. Kratky*⁴⁾. Eine eingehende Betrachtung über die Anwendung auf unseren Fall findet sich in l. c. III. Wir können uns daher kurz fassen. Die Verallgemeinerung der *Debyeschen* Theorie auf gleichmäßig mit Streumasse erfüllte Teilchen führt zur Formel:

$$\Phi(\mu) = \int_0^1 \psi(x) \frac{\sin \mu x}{\mu x} dx, \quad \mu = \frac{4\pi}{\lambda} L \vartheta. \quad (3)$$

Dabei bedeutet $\psi(x)$ die Abstandsfunktion, die wie folgt definiert ist: Die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand zwischen zwei beliebig herausgegriffenen Punkten des Körpers zwischen x und $x + dx$ liegt, soll gegeben sein durch $\psi(x) dx$. Aus Zweckmäßigkeitsgründen messen wir die Abstände durch die Relativwerte x zur Bezugslänge L . Wenn nicht anders erwähnt, wählen wir als diese den größtmöglichen Abstand. Sollte ein anderer Abstand als Bezugslänge verwendet werden, müßte die obere Grenze im Integral (3) entsprechend geändert werden. Die Variable μ stellt die größtmögliche Phasendifferenz zwischen zwei Punkten des Körpers dar. Da sie das Produkt $L \vartheta$ enthält, bewirkt eine Vergrößerung von L eine entsprechende Verkleinerung von ϑ bei gleichbleibendem Φ .

Formel (3) stellt den allgemeinsten Zusammenhang zwischen geometrischen Eigenschaften des streuenden Körpers und der Streukurve dar. Umgekehrt kann theoretisch durch *Fourier*-Umkehrung aus der Streukurve die Abstandsfunktion gewonnen werden, und diese stellt offenbar das Äußerste dar, was die Streukurve über die Form der Teilchen aussagen kann. Dies steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen bei analogen Problemen (Flüssigkeitsinterferenzen, *Patterson*-Analyse bei Kristallen). Um Formel (3) auszuwerten, muß zuerst die Abstandsfunktion $\psi(x)$ berechnet werden. Dieser rein geometrischen Aufgabe wenden wir uns nun zu.

Gegeben sei ein Körper von zunächst beliebiger Form. Wir symbolisieren einen Abstand x in bestimmter Richtung durch den Vektor \mathbf{r} und fragen nach der Häufigkeit, mit der

⁴⁾ II. Mitteilung dieser Reihe, *O. Kratky*, Monatsh. f. Chem. **76**, 225 (1946). Im folgenden angeführt als l. c. II.

dieser innerhalb des Körpers auftreten kann. Die Häufigkeit messen wir durch das Volumen, das der Endpunkt beschreiben kann. Dies wird klarer, wenn wir uns den Körper in der Richtung \mathbf{r} in lauter unendlich dünne Stäbchen zerschnitten denken. Bei der Verschiebung des Vektors \mathbf{r} innerhalb eines Stäbchens der Länge x_1 , ist der Spielraum offenbar gegeben durch die Differenz $x_1 - x$, falls $x_1 > x$; durch 0, falls $x_1 \leq x$. Wir müssen uns also aus allen Stäbchen ein Stück der Länge x herausgenommen denken; die Schnittstelle bleibt dabei der Willkür überlassen. Wir wählen sie zweckmäßig so, daß zwei parallele ebene Schnitte durch den Körper entstehen. Komplikationen können dabei nur an den Rändern der Schnittfläche entstehen. Für die von uns betrachteten Gebilde fallen diese Schwierigkeiten aber weg. Wir können dann die gesuchte Häufigkeit gleich dem Volumen der Restkalotten $V_{\mathbf{r}}$ setzen. Wenn wir nun den Vektor \mathbf{r} sämtliche Raumrichtungen durchlaufen lassen, müssen wir wohl bedenken, daß der Endpunkt eine Kugel von der Oberfläche $4x^2\pi$ beschreibt. Jedem infinitesimalen Raumwinkel $d\Omega$ kommt also a priori ein Anteil $x^2 d\Omega$ an $V(x)$ zu. Unter Berücksichtigung des Umstandes, daß $\int_0^1 \psi(x) dx = 1$ sein muß erhalten wir:

$$\psi(x) = \frac{1}{V^2} \int V_{\mathbf{r}} x^2 d\Omega, \quad (4)$$

wobei das Integral über den gesamten Raumwinkel zu erstrecken ist. Für das zweidimensionale Problem ergibt sich analog:

$$\psi(x) = \frac{1}{F^2} \int_0^{2\pi} F_{\mathbf{r}} x d\varphi, \quad (5)$$

wobei die Bezeichnung sich aus dem Sinn von selbst ergibt. Für unsere Zwecke genügt es, drei Spezialfälle zu behandeln, nämlich das eindimensionale Stäbchen (Nadel), die zweidimensionale Kreisscheibe und die Kugel. Um die Darstellung nicht zu unübersichtlich zu machen, bringen wir rein mathematische Ableitungen ohne besonderes sachliches oder methodisches Interesse in einem mathematischen Anhang am Ende dieser Abhandlung. Wir erhalten also (Anhang 1):

- a) Nadel: $\psi(x) = 2(1 - x),$
- b) Scheibe: $\psi(x) = \frac{16}{\pi} x (\arccos x - x \sqrt{1 - x^2}),$ (6)
- c) Kugel: $\psi(x) = 12x^2(2 - 3x + x^3).$

Abb. 1 zeigt die drei Kurven. Auffällig ist der geringe Unterschied zwischen Kugel und Scheibe. Nadel und Scheibe

haben natürlich nur Bedeutung als Grenzfälle dreidimensionaler Gebilde, doch ist zu beachten, daß sie für $x=0$ den Grenzwert nicht richtig darstellen; denn $\psi(x)$ für reale Körper muß

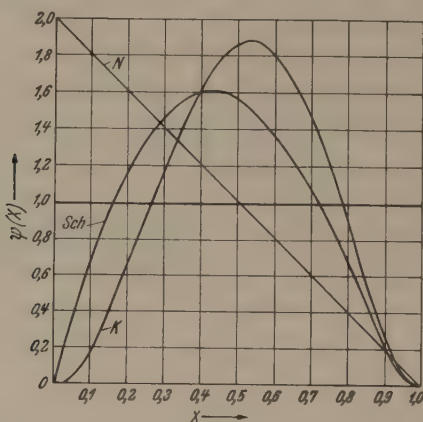


Abb. 1. Abstandsfunktionen von Kugel, Scheibe und Nadel.

immer den Faktor x^2 enthalten, wie aus (4) hervorgeht. Einsetzen der Abstandsfunktion in (3) liefert nach kurzer Zwischenrechnung (Anhang 2):

a) Nadel: $\Phi(\mu) = \frac{2}{\mu} \left[\text{Si } \mu - \frac{1 - \cos \mu}{\mu} \right]$ Si = Integralsinus,

b) Scheibe: $\Phi(\mu) = \frac{8}{\mu^2} [1 - \Lambda_1(\mu)]$ $\Lambda_1 = \frac{2}{\mu} J_1$ Bessel-Funktion 1ter Ordn.

c) Kugel: $\Phi(\mu) = \frac{72}{\mu^6} [\mu^2 + 4 - 4\mu \sin \mu + (\mu^2 - 4) \cos \mu]$ (7)

c) ist identisch mit der schon lange bekannten Formel für die Streuung einer Kugel:

$$\Phi(\mu) = \left[\frac{\sin \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2}}{\left(\frac{\mu}{2}\right)^3} \right]^2 \quad (7')$$

Abb. 2 zeigt die drei Streukurven.

Die entsprechenden Rechnungen für Zylinder und Ellipsoide führen schon auf recht komplizierte Ausdrücke. Wir können sie hier übergehen, denn anschließend soll eine Methode entwickelt werden, bei der die explizite Berechnung von $\psi(x)$ vermieden werden kann.

3. Koeffizientenmethode.

Wir gehen wieder von Formel (3) aus. Entwickeln wir

$$\frac{\sin \mu x}{\mu x} \text{ in eine Potenzreihe } \frac{\sin \mu x}{\mu x} = 1 - \frac{\mu^2 x^2}{3!} + \frac{\mu^4 x^4}{5!} - \frac{\mu^6 x^6}{7!} \dots$$

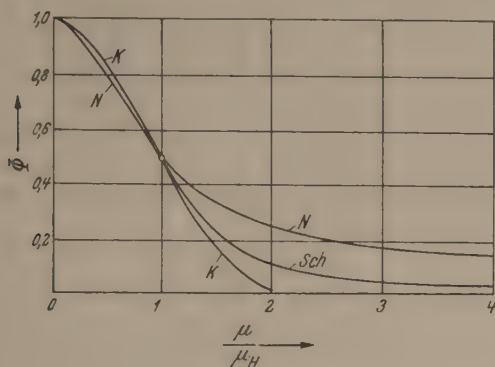


Abb. 2. Streufunktionen von Kugel, Scheibe und Nadel. Die Halbwertspunkte sind durch Abszistentransformation zur Deckung gebracht.

so können wir die Integration gliedweise ausführen und erhalten

wobei

$$\Phi(\mu) = 1 - f_2 \frac{\mu^2}{3!} + f_4 \frac{\mu^4}{5!} - f_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \quad (8)$$

$$f_2 = \int_0^1 x^2 \psi(x) dx, \quad f_4 = \int_0^1 x^4 \psi(x) dx, \dots \quad f_n = \int_0^1 x^n \psi(x) dx.$$

Die charakteristischen Koeffizienten f_n bestimmen ebenso wie $\psi(x)$ die Streukurve vollkommen. Sie haben dabei eine anschauliche Bedeutung. Nach der Definition von $\psi(x)$ als Wahrscheinlichkeitsfunktion sind sie nämlich nichts anderes als die Mittelwerte der n -ten Potenzen von x . Der Vorteil der Entwicklung (8) liegt nun darin, daß diese Mittelwerte direkt aus geometrischen Betrachtungen gewonnen werden können, u. zw. in vielen Fällen einfacher als die Abstandsfunktion $\psi(x)$. Wir zeigen dies am Beispiel zylindrischer und prismatischer Körper.

Wir betrachten einen Zylinder der Länge L und der Dicke $\frac{L}{\rho}$. Der vektorielle Abstand \mathbf{r} zwischen zwei Punkten läßt sich in eine Komponente a , parallel der Länge, und eine Komponente r , parallel der Grundfläche, zerlegen: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}$. Dann erhalten wir infolge der Orthogonalität von \mathbf{a} und \mathbf{r} :

$$x^2 = r^2 = a^2 + r^2 = a^2 + r^2$$

und durch weiteres Potenzieren:

$$\begin{aligned}x^4 &= a^4 + 2a^2r^2 + r^4 \\x^6 &= a^6 + 3a^4r^2 + 3a^2r^4 + r^6 \text{ usw.}\end{aligned}$$

Da die Vektorkomponenten a und r voneinander unabhängig alle möglichen Werte durchlaufen, kann der Mittelwert getrennt gebildet werden. Die Mittelwerte von a^n sind die charakteristischen Koeffizienten g_n des Stäbchens, die Mittelwerte von r^n die Koeffizienten h_n der Grundfläche (die Form derselben spielt offenbar für unsere Überlegungen keine Rolle, wir müssen nur allgemein als Dicke die Bezugslänge der Grundfläche einführen). Wir erhalten also die Koeffizienten f_n eines prismatischen Körpers als Aggregat der Koeffizienten von Länge und Grundfläche in der Form:

$$\begin{aligned}f_2 &= g_2 + \frac{h_2}{v^2}, \\f_4 &= g_4 + 2g_2 \frac{h_2}{v^2} + \frac{h_4}{v^4}, \\f_n &= g_n + \binom{m}{1} g_{n-2} \frac{h_2}{v^2} + \binom{m}{2} g_{n-4} \frac{h_4}{v^4} + \dots + \frac{h_n}{v^n} \quad n=2m\end{aligned} \quad (9)$$

Bei rechteckigem Querschnitt können wir die h_n in analoger Weise aus den g_n der Seiten zusammensetzen. Bei extremem Verhältnis zwischen Länge und Dicke müssen die g_n , bzw. h_n stark überwiegen. In diesem Falle empfiehlt es sich, die Streufunktion der Form (8) in die einzelnen Anteile zu verlegen. Haben wir z. B. ein Prisma von großer Länge, d. h. $v > 1$, dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\Phi(\mu) &= 1 - g_2 \frac{\mu^2}{3!} + g_4 \frac{\mu^4}{5!} - g_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \\&\quad - \frac{h_2}{v^2} \left[\frac{\mu^2}{3!} - 2g_2 \frac{\mu^4}{5!} + 3g_4 \frac{\mu^6}{7!} \dots \right. \\&\quad \left. + \frac{h_4}{v^4} \left[\frac{\mu^4}{5!} - \binom{3!}{2} g_2 \frac{\mu^6}{7!} \dots \right] \text{ usw.} \right.\end{aligned} \quad (10)$$

Ersetzen wir die Binomialkoeffizienten in den Klammerausdrücken durch Brüche nach dem Schema: z. B. $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{12 \cdot 10 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6}$, heben wir den Nenner aus der Klammer heraus und kürzen den Zähler mit den Fakultäten im Nenner, dann erhalten wir mit $\sigma = \frac{\mu}{v}$:

$$\Phi(\mu) = \begin{cases} \left[1 - g_2 \frac{\mu^2}{3!} + g_4 \frac{\mu^4}{5!} - g_6 \frac{\mu^6}{7!} + g_8 \frac{\mu^8}{9!} \dots \right] \\ - \frac{h_2}{2} \sigma^2 \left[\frac{1}{3} - g_2 \frac{\mu^2}{5 \cdot 3!} + g_4 \frac{\mu^4}{7 \cdot 5!} - g_6 \frac{\mu^6}{9 \cdot 7!} + g_8 \frac{\mu^8}{11 \cdot 9!} \dots \right] \\ + \frac{h_4}{2 \cdot 4} \sigma^4 \left[\frac{1}{3 \cdot 5} - g_2 \frac{\mu^2}{5 \cdot 7 \cdot 3!} + g_4 \frac{\mu^4}{7 \cdot 9 \cdot 5!} - g_6 \frac{\mu^6}{9 \cdot 11 \cdot 7!} + g_8 \frac{\mu^8}{11 \cdot 13 \cdot 9!} \dots \right] \\ - \frac{h_6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sigma^6 \left[\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} - g_2 \frac{\mu^2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3!} + \dots \right] \end{cases} \quad (11)$$

usw.

oder, wenn wir die Klammerausdrücke der Reihe nach mit $\Phi_0(\mu)$, $\Phi_2(\mu)$, $\Phi_4(\mu)$... usw. bezeichnen:

$$\Phi(\mu) = \Phi_0(\mu) - h_2 \frac{\sigma^2}{2} \Phi_2(\mu) + h_4 \frac{\sigma^4}{2 \cdot 4} \Phi_4(\mu) \dots \quad (12)$$

Die Formel (12) eignet sich besonders zur Serienberechnung von Prismen und Zylindern verschiedenen Längen-Dickenverhältnisses v . Die Reihen $\Phi_0, \Phi_2 \dots \Phi_n$ stehen in einem einfachen Verhältnis zueinander. Da $\Phi_0(\mu)$ die Streufunktion des ein-dimensionalen Stäbchens darstellt, also nach (7a) in einem geschlossenen Ausdruck dargestellt werden kann, kann man auch für $\Phi_2, \Phi_4 \dots$ usw. geschlossene Ausdrücke finden. Wir werden davon im nächsten Abschnitt Gebrauch machen. Hier kommt es uns nur darauf an, das Methodische klar herauszustellen. In (11), bzw. (12) ist bis zu einem gewissen Grade eine Trennung des Einflusses von Längs- und Querdimension erreicht; ein großer Vorteil für die numerische Ausrechnung und, wie sich noch zeigen wird, für die theoretische Diskussion des Streuverhaltens. Ein Nachteil der Koeffizientenmethode liegt darin, daß die Potenzreihen bei größeren Werten von μ (> 10) für die numerische Berechnung unhandlich werden. Glücklicherweise ist es in vielen und gerade den wichtigsten Fällen möglich, wieder zu geschlossenen Ausdrücken zurückzukehren.

Berechnung der Streukurven.

Die im vorhergehenden Abschnitt entwickelten Methoden, vor allem die dritte, setzen uns instand, die Streukurven für verschieden geformte Körper zu berechnen. Bei der großen Mannigfaltigkeit von Formen müssen wir uns auf einige Körperklassen, nämlich Rotationsellipsoide, Zylinder und Prismen beschränken. Da die Streukurven gegen feinere Formeinflüsse ziemlich unempfindlich sind, reichen diese Fälle auch vollkommen aus, um alle Formen genügend zu approximieren.

Die Streukurven für Kugel, Scheibe und unendlich dünnes Stäbchen haben wir bereits vorweggenommen (7). Abb. 2 zeigt, daß die Kugel nicht etwa, wie man erwarten könnte, zwischen flachen und gestreckten Körpern steht, sondern einen Extremfall darstellt. Dies gilt ganz allgemein. Die Kugel hat von allen massiven Körpern die am stärksten abfallende Streukurve. Jede Abweichung von der Kugelgestalt bewirkt eine Verflachung der Kurve. Um diesen Einfluß näher kennenzulernen, beginnen wir mit der Untersuchung von Ellipsoiden.

1. Ellipsoide⁵⁾.

Als Bezugsgröße wählen wir die zweifache Achse. Das Achsenverhältnis sei v ($v > 1$ gestreckt, $v < 1$ flach). Wir gehen nach Methode 1 vor. Zerlegen wir wieder das Ellipsoid in parallele Schichten und betrachten wir gleichzeitig die affine Kugel zwischen den beiden Tangentialebenen, dann zeigt die bloße Anschauung, daß sich die Schnittflächen des Ellipsoides von den entsprechenden der Kugel nur durch einen konstanten Faktor, der gleich dem Verhältnis der Volumina sein muß, unterscheiden. Formel (1) liefert also denselben Ausdruck wie für eine Kugel von Durchmesser p ⁶⁾. Bezeichnen wir den Winkel zwischen Spiegelnormale und Rotationsachse mit φ , dann besteht die einfache geometrische Beziehung:

$$p^2 = v^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 + (v^2 - 1) \cos^2 \varphi.$$

Formel (2) geht über in:

$$\Phi_{\text{EH}}(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_{\text{Kug}}(\mu, p) \sin \varphi \, d\varphi. \quad (13)$$

Zur Integration benutzen wir wieder die Reihenentwicklung (8) und erhalten:

$$\Phi_{\text{EH}}(\mu) = 1 - k_2 f_2 \frac{\mu^2}{3!} + k_4 f_4 \frac{\mu^4}{5!} - \dots \quad (14)$$

Darin bedeuten f_n die Koeffizienten der Kugel:

$$f_n = \frac{72}{(n+3)(n+4)(n+6)}$$

⁵⁾ In einer uns inzwischen zugegangenen Arbeit von C. G. Shull und L. C. Roess, J. appl. Physics Vol 18, Nr. 3, pp 308 — 313, März 1947 ist das Problem der Streuung von Ellipsoiden in ähnlicher Weise behandelt und dasselbe Ergebnis erhalten worden.

⁶⁾ Der Umstand, daß Ellipsoide bei Durchstrahlung in bestimmter Richtung wie Kugeln streuen, ist schon von Hosemann benützt worden. R. Hosemann, Z. Physik **113**, 751 (1939).

und die Zusatzkoeffizienten k_n der Reihe nach:

$$k_2 = \int_0^1 p^2 d(\cos \varphi) = 1 + \frac{1}{3}(v^2 - 1) = \frac{1}{3}(v^2 + 2)$$

$$k_4 = \int_0^1 p^4 d(\cos \varphi) = 1 + \frac{2}{3}(v^2 - 1) + \frac{1}{5}(v^2 - 1)^2$$

$$= \frac{1}{5} \left(v^4 + \frac{4}{3} v^2 + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} \right) \quad (15)$$

$$k_6 = \int_0^1 p^6 d(\cos \varphi) = 1 + \frac{3}{3}(v^2 - 1) + \frac{3}{5}(v^2 - 1)^2 + \frac{1}{7}(v^2 - 1)^3$$

$$= \frac{1}{7} \left(v^6 + \frac{6}{5} v^4 + \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 3} v^2 + \frac{6 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} \right)$$

usw.

Aus (15) ergibt sich eine bequeme Rekursionsformel, nämlich:

$$\begin{aligned} \text{a) } k_2 &= \frac{1}{3}(v^2 + 2), \quad k_n = \frac{1}{n+1}(v^n + n k_{n-2}) \text{ für } v < 1, \\ \text{b) } k_2 &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{v^2} \right), \quad k_n = \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{n}{v^2} k_{n-2} \right) \text{ für } v > 1, \end{aligned} \quad (16)$$

wenn wir bei gestreckten Ellipsoiden wieder die lange Achse als Bezugslänge einführen, d. h. für v einfach μ schreiben. Besonders einfach werden die beiden Grenzfälle $v = 0$ und $v = \infty$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_0(\mu) &= 1 - \frac{2}{3} f_2 \frac{\mu^2}{3!} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} f_4 \frac{\mu^4}{5!} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} f_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \\ \text{b) } \Phi_\infty(\mu) &= 1 - \frac{1}{3} f_2 \frac{\mu^2}{3!} + \frac{1}{5} f_4 \frac{\mu^4}{5!} - \frac{1}{7} f_6 \frac{\mu^6}{7!} \end{aligned} \quad (17)$$

Sie geben die Grenze an, bis zu der die Kurven für abgeplattete, bzw. gestreckte Ellipsoide von der Kugelstreuarkurve abweichen können. (17b) können wir noch eine andere Gestalt geben:

$$\Phi_\infty(\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \Phi_{\text{Kug}}(\mu) d\mu. \quad (17')$$

Das Integral in (17') stellt die Fläche unter der Kugelstreuarkurve zwischen den Abszissen 0 und μ dar, $\Phi_\infty(\mu)$ also die entsprechende mittlere Ordinate. Nun geht Φ_{Kug} so rasch gegen 0, daß ab $\mu \sim 8$ die Fläche praktisch als konstant $= 1 \cdot 2 \pi$ betrachtet werden kann (Anhang 3). $\Phi_\infty(\mu)$ geht dann umgekehrt proportional μ :

$$\Phi_\infty(\mu) = \frac{1 \cdot 2 \pi}{\mu} = \frac{3 \cdot 77}{\mu}, \quad \mu > 8 \quad (18)^* 7)$$

7) Näherungsformeln werden künftig durch einen Stern gekennzeichnet.

Wie wir sehen werden, handelt es sich hier um eine allgemeine Erscheinung bei langgestreckten Körpern.

Zur Serienberechnung von Ellipsoiden verschiedenen Streckungsgrades v ist es nützlich, (14) in Verbindung mit (15) etwas umzuformen. Wir erhalten für gestreckte Ellipsoide:

$$\Phi_r(\mu) = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{3} f_2 \frac{\mu^2}{3!} + \frac{1}{5} f_4 \frac{\mu^4}{5!} - \frac{1}{7} f_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \right] \\ - \frac{1}{v^2} \left[2 \cdot \frac{1}{3} f_2 \frac{\mu^2}{3!} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} f_4 \frac{\mu^4}{5!} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{7} f_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \right] \\ + \frac{1}{v^4} \left[2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} f_4 \frac{\mu^4}{5!} - \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{7} f_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \right] \\ - \frac{1}{v^6} \left[2 \cdot \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{7} f_6 \frac{\mu^6}{7!} \dots \right] \\ \vdots \\ \text{usw.} \end{cases} \quad (19)$$

oder, wenn wir die Klammerausdrücke der Reihe nach mit $R_0, R_2, R_4 \dots$ usw. bezeichnen (R_0 ist in diesem Falle identisch mit dem Φ_∞ in (17)):

$$\Phi_v(\mu) = R_0 - \frac{1}{v^2} R_2 + \frac{1}{v^4} R_4 - \frac{1}{v^6} R_6 \dots \text{ usw.} \quad (20)$$

Wenn wir die Funktionen $R_0 \dots R_n$ ein für allemal ausrechnen, können wir sehr bequem die Streukurve für jedes v bestimmen. Über $\mu = 10$ hinaus wird die Berechnung durch Potenzreihen mühsam. Da R_0 in einem geschlossenen Ausdruck darstellbar ist (Anhang 3) und zwischen den Funktionen $R_0, R_2 \dots R_n$ ein einfacher funktioneller Zusammenhang besteht, können auch für $R_2, R_4 \dots$ geschlossene Ausdrücke gefunden werden, doch wollen wir darauf nicht näher eingehen. Für $\mu > 10$ verwendeten wir eine Näherungsformel, die bei größeren Streckungsgraden auch für kleinere Werte von μ recht gut verwendbar ist:

$$\Phi_v(\mu) = \Phi_{\text{Kug}}\left(\frac{\mu}{v}\right) \cdot \Phi_\infty(\mu) = \frac{3.77}{\mu} \Phi_{\text{Kug}}\left(\frac{\mu}{v}\right). \quad (21)^*$$

Zur Herleitung von (21) gehen wir von der *Guinierschen* Näherungsformel aus. Nach *Guinier* (l. c. I) läßt sich die Streukurve eines beliebigen Körpers durch eine universelle Funktion ausdrücken, die in unserer Schreibweise lautet:

$$\Phi(\mu) = e^{-f_2 \frac{\mu^2}{3!}}. \quad (22)^*$$

Setzen wir (22) an Stelle von Φ_{Kug} in (13) ein, dann erhalten wir nach leichter Zwischenrechnung

$$\Phi_r(\mu) = e^{-f_2 \frac{\mu^2}{3! v^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon \mu} \int_0^{\varepsilon \mu} e^{-f_2 \frac{z^2}{3!}} dz. \quad z = r \mu \cos \varphi \quad (23)^*$$

Ersetzen wir wieder $e^{-\frac{f_2}{3!} \frac{\mu^2}{v^2}}$ durch $\Phi_{\text{Kug}}\left(\frac{\mu}{v}\right)$ und den zweiten Faktor, der (17') vollkommen analog ist, durch $\Phi_{\infty}(\epsilon \mu)$ ($\epsilon = \frac{\sqrt{v^2 - 1}}{v} =$ Exzentrizität), dann sehen wir den Zusammenhang mit (21). Bei der praktischen Erprobung zeigte es sich, daß die Form (21) am günstigsten ist.

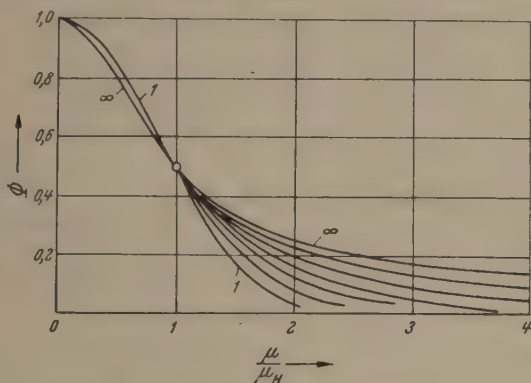


Abb. 3. Streufunktionen von gestreckten Ellipsoiden mit $v = 1, 2, 3, 4, 6, 10, \infty$. Oberhalb des Halbwertsunktes ist nur $v = 1, \infty$ eingezeichnet. Unterhalb Reihenfolge von innen nach außen.

Die Ergebnisse sind in Tab. 1 und Abb. 3 niedergelegt. Nach der Guinierschen Näherung (22) müßten alle Kurven in eine zusammenfallen, während die abgeleiteten Kurven (23) unseren wieder nahekomen. Darin liegt also ein innerer Widerspruch des Guinierschen Ansatzes. Dieser hat demnach nur für Körper Gültigkeit, die nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweichen.

2. Zylinder.

Wir gehen von Formel (11), bzw. (12) aus. Φ_0 ist uns aus (7a) bereits bekannt: $\Phi_0(\mu) = \frac{2}{\mu} \left(Si \mu - \frac{1 - \cos \mu}{\mu} \right)$. Wenn wir aus allen Klammern den Faktor $\frac{2}{\mu}$ herausheben, erhalten wir:

$$\Phi = \frac{2}{\mu} \left[S_0(\mu) - h_2 \frac{\sigma^2}{2} S_2(\mu) + h_4 \frac{\sigma^4}{2 \cdot 4} S_4(\mu) \dots \right] \quad (24)$$

Zwischen den $S_0, S_2 \dots$ usw. besteht die aus den Reihenentwicklungen unmittelbar zu entnehmende Beziehung:

$$S_2 = \frac{1}{\mu^2} \int_0^\mu \mu S_0(\mu) d\mu, \quad S_4 = \frac{1}{\mu^4} \int_0^\mu \mu^3 S_2(\mu) d\mu \dots \text{ usw.} \quad (25)$$

Die Integrale lassen sich leicht ausführen und wir erhalten:

$$\begin{aligned} S_0 &= \text{Si } \mu + \frac{\cos \mu}{\mu} - \frac{1}{\mu}, \\ S_2 &= \frac{1}{2} \left(\text{Si } \mu + \frac{\cos \mu}{\mu} + \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right) - \frac{1}{\mu}, \\ S_4 &= \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\text{Si } \mu + \frac{\cos \mu}{\mu} + \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \frac{1}{\mu} \dots, \\ S_6 &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\text{Si } \mu + \frac{\cos \mu}{\mu} + \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right) - \frac{1}{3 \cdot 5} \frac{1}{\mu} \dots \end{aligned} \quad (26)$$

usw.

Der Ausdruck $\left(\text{Si } \mu + \frac{\cos \mu}{\mu} + \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right)$ kehrt immer wieder. Da er bereits bei mäßigen Werten von μ (ab $\mu = 5 \cdot 10^0$, ab $\mu = 10 \cdot 10^0$ Genauigkeit) fast konstant $= \frac{\pi}{2}$ wird, wollen wir ihn mit $\frac{\pi'_\mu}{2}$ bezeichnen. Ab S_4 treten dann noch Glieder mit μ^{-3} und höheren negativen Potenzen auf, die wir aber vernachlässigen können. Denn bei kleinen μ -Werten fallen S_4 usw. nicht mehr ins Gewicht, bei großen werden die Glieder an sich schon sehr klein. Da diese Vernachlässigung praktisch bedeutungslos ist, werden wir damit abgeleitete Formeln als exakt betrachten. (24) zerfällt dann in zwei Anteile, genau genommen in drei, denn infolge des Fehlens von $\frac{\sin \mu}{\mu^2}$ in S_0 müssen wir noch eine Korrektur $-\frac{\sin \mu}{\mu^2}$ anhängen.

$$\Phi = \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\pi'_\mu}{2} \left[1 - h_2 \frac{\sigma^2}{2^2} + h_4 \frac{\sigma^4}{(2 \cdot 4)^2} - h_6 \frac{\sigma^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \dots \right] - \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right\} - \frac{1}{\mu} \left[1 - h_2 \frac{\sigma^2}{2!} + h_4 \frac{\sigma^4}{4!} - h_6 \frac{\sigma^6}{6!} \dots \right] \quad (27)$$

oder mit zwei neuen Funktionen φ und ω :

$$\Phi = \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\pi'_\mu}{2} \varphi(\sigma) - \frac{1}{\mu} \omega(\sigma) - \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right\}. \quad (28)$$

Mit $\varphi(\sigma)$ werden wir uns im übernächsten Abschnitt eingehend zu beschäftigen haben; wir wollen es hier als bekannt voraussetzen:

$$\varphi_{\text{Kreis}}(\sigma) = \left[\Lambda_1 \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right]^2.$$

Für $\alpha(\sigma)$ entnehmen wir aus (27) die Formel:

$$\alpha(\sigma) = \int_0^1 \Psi_{\text{Querschnitt}}(\alpha) \cos \sigma \alpha = \frac{d}{d\sigma} (\sigma \Phi_{\text{Querschnitt}}(\sigma)) = \Phi_{\text{Querschnitt}}(\sigma) + \sigma \Phi'_{\text{Querschnitt}}(\sigma). \quad (29)$$

Für kreisförmigen Querschnitt finden wir nach kurzer Zwischenrechnung (Anhang 4):

$$\alpha_{\text{Kreis}}(\sigma) = \frac{8}{\sigma^2} (3J_2(\sigma) + J_0(\sigma) - 1) - 2\Lambda_2(\sigma) - \Phi_{\text{Scheibe}}(\sigma). \quad (30)$$

$\Lambda_2 = \frac{8}{\sigma^2} J_2$ Besselfunktion 2ter Ordnung.

Damit lautet die Streufunktion für den (langen) Kreiszylinder:

$$\Phi = \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\pi}{2} \Lambda_1\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{1}{\mu} (2\Lambda_2(\sigma) - \Phi_{\text{Scheibe}}(\sigma)) - \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right\} \quad v > 1 \quad (31)$$

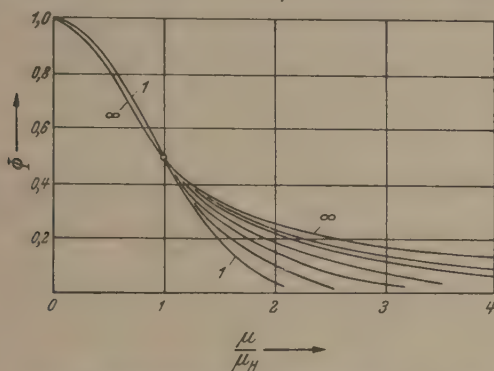


Abb. 4. Streufunktionen von Zylindern mit $v = 1, 2, 3, 4, 6, 8, \infty$. Oberhalb des Halbwertpunktes ist nur $v = 1, \infty$ eingezeichnet. Unterhalb Reihenfolge von innen nach außen.

Für flache Zylinder ($v < 1$) brauchen wir nur die g_n und h_n in (11) zu vertauschen. Als Bezugslänge für μ wählen wir diesmal den Durchmesser, für σ die Dicke der Scheibe. Da wir für Φ_0 aus (7b) $\Phi_0 = \frac{8}{\mu^2} (1 - \Lambda_1(\mu))$ entnehmen, heben wir $\frac{8}{\mu^2}$ heraus und erhalten analog (24):

$$\Phi = \frac{8}{\mu^2} \left\{ T_0(\mu) - g_2 \frac{\sigma^2}{2} T_2(\mu) + g_4 \frac{\sigma^4}{2 \cdot 4} T_4(\mu) \dots \right\} \quad (32)$$

Zwischen $T_0, T_2 \dots$ usw. besteht nun die Beziehung:

$$T_2 = \frac{1}{\mu} \int_0^\mu T_0 d\mu, \quad T_4 = \frac{1}{\mu^3} \int_0^\mu T_2 d\mu, \dots \text{ usw.} \quad (33)$$

Die Integration ergibt, wenn wir wieder μ^{-3} usw. vernachlässigen:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 - \Lambda_1(\mu), \\ T_2 &= 1 - \frac{1}{\mu} I_1(\mu), \\ T_4 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} I_1(\mu) \dots \quad I_1(\mu) = \int_0^\mu \Lambda_1(\mu) d\mu \quad (34) \\ T_6 &= \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{1}{\mu} I_1(\mu) \dots \end{aligned}$$

(32) zerfällt wieder in drei Teile:

$$\Phi = \frac{8}{\mu^2} \left\{ \begin{aligned} &\left[1 - g_2 \frac{\sigma^2}{2!} + g_4 \frac{\sigma^4}{4!} - g_6 \frac{\sigma^6}{6!} \dots \right] - \Lambda_1(\mu) \\ &+ \frac{1}{\mu} I_1 \left[\frac{g_2 \frac{\sigma^2}{2} - g_4 \frac{\sigma^4}{(2 \cdot 4) \cdot 2} + g_6 \frac{\sigma^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6) \cdot 2 \cdot 4} \dots \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

oder durch Einführung von zwei neuen Funktionen χ und Ω :

$$\Phi = \frac{8}{\mu^2} \left\{ \chi(\sigma) + \frac{1}{\mu} I_1(\mu) \Omega(\sigma) - \Lambda_1(\mu) \right\} \quad (36)$$

$\chi(\sigma)$ ist vollkommen analog $\omega(\sigma)$:

$$\chi(\sigma) = \int_0^1 2(1-x) \cos \sigma x - 2 \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} = \left(\frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \right)^2 \quad (37)$$

Für $\Omega(\sigma)$ und $I_1(\mu)$ ergeben sich nach kurzer Zwischenrechnung Anhang 5, 6):

$$\Omega(\sigma) = \frac{2}{\sigma} [I_0(\sigma) - 2J_1(\sigma)], \quad I_0 = \int_0^\sigma \Lambda_0(\sigma) d\sigma = 2[J_1 + J_3 + \dots] \rightarrow 1 \quad (38)$$

$$I_1(\mu) = 2 I_0(\mu) - \mu \Lambda_1(\mu) = 2[I_0(\mu) - J_1(\mu)] \rightarrow 2 \quad (39)$$

Formel (28) (bzw. (31)) und (36) setzen uns instand, die Streukurven beliebiger Kreiszylinder zu berechnen.

3. Prismen.

Der Rechengang des vorigen Abschnittes gilt zum größten Teil, speziell Formel (24), (25), (26), (27), (28), (29), auch für prismatische Körper. Wir brauchen bloß für die h_n die entsprechenden Koeffizienten der Grundfläche eingesetzt zu denken. Das Analogon zu den flachen Zylindern ($v < 1$) läßt sich nicht so ohne weiteres aufstellen, ist aber bei rechteckiger Grund-

fläche auch nicht nötig; denn wir können durch passende Wahl der Längskante immer erreichen, daß $v \rightarrow 1$ wird. Wir ordnen den drei Kanten mit abnehmender Länge die Variablen μ , σ , τ zu und betrachten die mittlere Kante als Bezugslänge der Grundfläche, für die dann auch das Seitenverhältnis $u \rightarrow 1$ wird. Da die Koeffizienten h_n nach einer (9) analogen Formel leicht zu gewinnen sind, können wir sofort (24) in Verbindung mit (26) zur Berechnung der Streukurve verwenden. Dieser Weg ist für größere Werte von σ etwas mühsam, was sich aber nur bei $v \rightarrow 1$ bis etwa $v \rightarrow 2$ störend bemerkbar macht. Wollen wir Formel (28) anwenden, müssen wir $\varphi(\sigma)$ und $\omega(\sigma)$ kennen. Ersteres können wir unter Vorwegnahme des folgenden Abschnittes als bekannt annehmen. $\omega(\sigma)$ erhalten wir nach (29), falls die Abstandsfunktion der Grundfläche bekannt ist (und das Integral ausgeführt werden kann). Im allgemeinen ist dies nicht der Fall. Wir können uns aber durch eine Näherungsformel helfen, wenn die Streukurve der Grundfläche Φ_{Gr} bekannt ist. Wir ersetzen den Differentialquotienten $\Phi'_{Gr}(\sigma)$ in (29) durch den Differenzenquotienten und schreiben:

$$\omega(\sigma) = \Phi_{Gr}(\sigma) + \sigma \frac{\Delta \Phi_{Gr}(\sigma)}{\Delta \sigma}. \quad (40)^*$$

Eine andere gröbere Näherung erhalten wir durch Anwendung der *Guinierschen* Formel (22):

$$\Phi_{Gr}(\sigma) = e^{-h_2 \frac{\sigma^2}{6}}.$$

Einsetzen in (29) ergibt:

$$\omega(\sigma) = e^{-\frac{h_2 \sigma^2}{6}} \left(1 - \frac{h_2 \sigma^2}{3} \right) = \Phi_{Gr}(\sigma) \left(1 - \frac{h_2 \sigma^2}{3} \right) \quad \sigma \approx 5 \quad (41)^*$$

Bis etwa $\sigma \approx 5$ ist die Übereinstimmung recht befriedigend, besonders bei Grundflächen, die nicht zu sehr von Kreis oder Quadrat abweichen. Übrigens brauchen wir an die Genauigkeit von $\omega(\sigma)$ keine übertriebenen Anforderungen zu stellen, denn es spielt neben $\varphi(\sigma)$ nur die Rolle eines Korrekturgliedes.

Einen Grenzfall können wir exakt behandeln, nämlich die rechteckige, unendlich dünne Platte. Die Grundfläche ist dann zu einem Strich ausgeartet mit der Abstandsfunktion

$$\psi_{Gr}(x) = 2(1 - x).$$

$\varphi(\sigma)$ entnehmen wir (49b):

$$\varphi_{\infty}(\sigma) = \frac{2}{\sigma} (J_0(\sigma) - J_1(\sigma)),$$

(vgl. (38). Für $\omega(\sigma)$ bekommen wir nach Ausführung von Integral (29) (Anhang 7):

$$\omega_{\infty}(\sigma) = \left(\frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \right)^2 = \chi(\sigma). \quad (42)$$

Also wird:

$$\text{Rechteck: } \Phi(\mu) = \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\pi_{\mu}}{\sigma^2} (I_0(\sigma) - J_1(\sigma)) - \left(\frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \right)^2 - \frac{\sin \mu}{\mu^2} \right\}. \quad (43)$$

Die Rechtecke sind an sich nicht so interessant, aber sie können uns als Hilfsmittel zur Berechnung von $\omega(\sigma)$ nach (40)* dienen. Übrigens gelingt es, für rechteckige Grundfläche $\omega(\sigma)$ durch einen geschlossenen Ausdruck darzustellen:

$$\omega_u(\sigma) = \chi(\sigma) + \frac{1}{u^2} \frac{1}{6} \frac{\sin \sigma}{\sigma} - \frac{\pi'_\sigma}{u} \Omega(\tau) + \frac{1}{u^2} \rho(\tau); \quad (44)$$

$$\rho(\tau) = \frac{2}{\tau^2} \left(3\chi(\tau) - \frac{2 \sin \tau}{\tau} - 1 \right)$$

(Ableitung siehe Anhang 8). Doch ist obige Formel für die praktische Auswertung zu kompliziert. Abb. 5 zeigt den Ver-

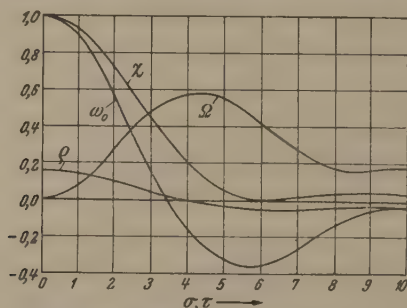


Abb. 5. Hilfsfunktionen χ , ω_0 (Kreis), Ω , ρ . Die Hilfsfunktionen ω für beliebigen Stäbchenquerschnitt müssen zwischen ω_0 und χ verlaufen.

lauf der Hilfsfunktionen ω_{Kreis} , $\omega_{\infty} = \chi$, Ω und ρ . Wir bringen als Beispiel eine Serie von Prismen mit $u=2$ und $v=1, 2, 3, 4, 6, 10, \dots$. Die Berechnung wurde nach der Reihenformel durchgeführt.

4. Stäbchen.

Bei den bis jetzt behandelten globularen Körpern, Prismen Zylindern und Ellipsoiden haben wir die Streukurve als Funktion von μ erhalten. Experimentell erhalten wir jedoch Intensitätskurven in Abhängigkeit von σ . Der Zusammenhang zwischen beiden ist eindeutig, wenn wir die absolute Größe der Bezugs-

länge kennen. Da der experimentell zugängliche Winkelbereich nach unten beschränkt ist ($\vartheta \sim 10^{-4}$), sind unsere Streukurven erst ab einem gewissen, von L abhängigen μ realisierbar. Infolge des starken Abfalls der Intensität mit μ könnten also

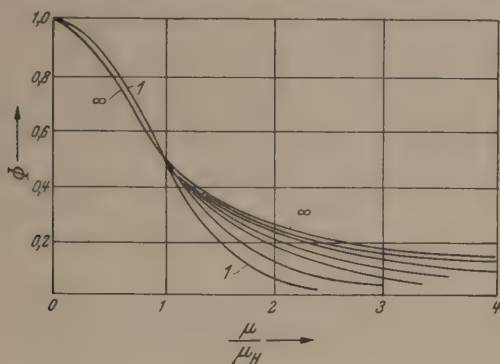


Abb. 6. Streukurven von rechteckigen Prismen mit $u=2$ und $v=1, 2, 3, 4, 6, 10, \infty$. Oberhalb des Halbwertspunktes ist nur $v=1, \infty$ eingetragen. Unterhalb Reihenfolge von innen nach außen.

genügend große ($> 1000 \text{ \AA}$) Teilchen keine beobachtbare Kleinwinkelstreuung geben. Dies ist im allgemeinen auch der Fall, doch wirkt hier ein Effekt entgegen, den wir bis jetzt außer Acht gelassen haben. Unsere Funktion Φ zeigt wohl den relativen Verlauf der gestreuten Intensität, sagt aber nichts aus über deren absolute Größe. Für ein Einzelteilchen ist sie proportional dem Quadrat des Volumens. In einer Lösung bestimmter Gewichtskonzentration ist die Anzahl der Teilchen umgekehrt proportional dem Volumen. Demnach wird die effektive Intensität der Streuung cet. par. dem Teilchenvolumen proportional. Wir berücksichtigen diesen Umstand durch Einführung der effektiven Streufunktion $\tilde{\Phi}$. Als Einheitslösung, für die $\tilde{\Phi} = \Phi$ ist, wählen wir eine Lösung von Kugeln. Über Größe und Konzentration brauchen wir keine Festsetzung zu treffen. Praktisch gehen wir nun so vor, daß wir für jeden Körper angeben, welche Abmessung dem Durchmesser der Vergleichskugel, der Vergleichslänge \tilde{L} , gleichzusetzen ist. $\tilde{\Phi}$ ergibt sich dann durch Multiplikation von Φ mit dem Verhältnis Körpervolumen : Kugelvolumen.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zu dem Thema dieses Abschnitts zurück. Unter Stäbchen verstehen wir dabei gestreckte Körper mit praktisch unendlicher Länge. Wir werden sie zweckmäßig durch Zylinder und Prismen annähern. Als Vergleichslänge wählen wir die Dicke (darauf bezogen σ). Ein Zylinder mit Streckungsgrad v gibt ein Volumenverhältnis zur Ein-

heitskugel von $1,5v$. Damit wäre also (28) zu multiplizieren und der Grenzübergang zu $\mu \rightarrow 0$ zu machen. Wir erhalten sofort

$$\begin{aligned} \text{a) Kreiszyylinder:} \quad \tilde{\Phi}(\sigma) &= \frac{1,5\pi}{\sigma} \varphi_{\text{Kreis}}(\sigma), \\ \text{b) beliebige Grundfläche:} \quad \tilde{\Phi}(\sigma) &= k \cdot \frac{1,5\pi}{\sigma} \varphi_{\text{Gr}}(\sigma). \end{aligned} \quad (45)$$

Der Faktor k bedeutet das Verhältnis Grundfläche : Kreisfläche. (45) ist interessant, weil es von v und μ nicht mehr abhängt. Wenn eine Dimension sehr groß wird, wirkt sich also nur mehr der Querschnitt auf die Streuung aus. Zu demselben Ergebnis wären wir bei den Ellipsoiden nach (21) gelangt:

$$\text{Ellipsoid:} \quad \tilde{\Phi}(\sigma) = \frac{1,2\pi}{\sigma} \Phi_{\text{Kug}}(\sigma). \quad (45)^*$$

Wir stehen nun vor der Aufgabe, die Zusatzfunktionen $\varphi(\sigma)$ für verschiedene Querschnitte zu berechnen. Aus (27) entnehmen wir:

$$\varphi(\sigma) = 1 - h_2 \frac{\sigma^2}{2^2} + h_4 \frac{\sigma^4}{(2 \cdot 4)^2} - h_6 \frac{\sigma^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \dots \quad (46)$$

Die zugrunde liegende Reihe ist die *Bessel-Funktion* 0ter Ordnung $J_0(\sigma)$. Sie zeigt einen ähnlich periodisch abklingenden Verlauf wie die Funktion $\frac{\sin \mu}{\mu}$. Wir können in vollkommener Analogie zu (3) schreiben:

$$\varphi(\sigma) = \int_0^1 \psi(x) J_0(\sigma x) dx, \quad (47)$$

worin $\psi(x)$ die Abstandsfunktion des Querschnitts ist. Wir können der Funktion $\varphi(\sigma)$ auf Grund von (47) eine ähnliche Interpretation geben wie $\Phi(\mu)$ auf Grund von (3). Sie ist nämlich nichts anderes als die Streufunktion einer Fläche, die symmetrisch durchstrahlt wird. Um dies zu zeigen, führen wir denselben Gedankengang, der bei räumlicher Verteilung zum *Debyeschen* Ansatz führt, für die Ebene durch. Ein Abstand l möge in der Ebene, die symmetrisch⁸⁾ durchstrahlt wird, alle Lagen einnehmen. Der maximale Phasenunterschied ist $\sigma = \frac{4\pi}{\lambda} l \sin \alpha$. Bei einer Verdrehung um α gegen diese Stellung wird die Phasendifferenz gleich $\sigma \cos \alpha$. Mittelung über alle Lagen ergibt

$$J \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sigma \cos \alpha) d\alpha. \quad (48)$$

⁸⁾ Damit ist gemeint, daß die Strahlensymmetrale in der Ebene liegt.

Tatsächlich stimmt (48) mit der Integraldarstellung der *Bessel-Funktion* 0ter Ordnung überein, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Wir können den Sachverhalt folgendermaßen ausdrücken: In einer Dispersion von Stäbchen geben nur diejenigen Teilchen einen Beitrag zur Streustrahlung, deren Achse in der Spiegelebene liegt. Die unendliche Ausdehnung der Teilchen in einer Dimension drückt sich in einem zusätzlichen Abfall der Streukurve mit $\frac{1}{\sigma}$ aus.

Die direkte Berechnung von $\varphi(\sigma)$ gelingt für den Kreiszylinder und die unendlich dünne Lamelle. Für den ersten Fall verwenden wir besser die (1) analoge Formel zur Berechnung der Amplitude

$$A_{\text{Kreis}} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} 2 \pi J_0(\sigma r) dr = \frac{8}{\sigma^2} \int_0^{\frac{\sigma}{2}} y J_0(y) dy = \frac{4}{\sigma} J_1\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \Lambda_1\left(\frac{\sigma}{2}\right).$$

Für die Lamelle ist $\psi(x) = 2(1-x)$ in (47) einzusetzen:

$$\begin{aligned} \varphi_{\infty}(\sigma) &= \int_0^1 2(1-x) J_0(\sigma x) dx = \frac{2}{\sigma} \int_0^{\frac{\sigma}{2}} \left(1 - \frac{y}{\sigma}\right) J_0(y) dy = \\ &= \frac{2}{\sigma} (I_0(\sigma) - J_1(\sigma)) = \frac{I_1(\sigma)}{\sigma}; \end{aligned}$$

$$\text{a) Kreiszylinder: } \varphi(\sigma) = \Lambda_1^2\left(\frac{\sigma}{2}\right), \quad (49)$$

$$\text{b) Lamelle: } \varphi(\sigma) = \frac{2}{\sigma} (I_0(\sigma) - J_1(\sigma)) = \frac{I_1(\sigma)}{\sigma}.$$

Für rechteckigen Querschnitt (Kantenverhältnis = u) wenden wir wieder in gewohnter Weise die Koeffizientenzerlegung in (46) an und erhalten nach leichter Umformung:

$$\varphi_u(\sigma) = \left[\begin{aligned} &\left[1 - g_2 \frac{\sigma^2}{2^2} + g_4 \frac{\sigma^4}{(2 \cdot 4)^2} - g_6 \frac{\sigma^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \dots \right] \\ &- \frac{g_2 \sigma^2}{u^2 2^2} \left[1 - \frac{g_2 \sigma^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{g_4 \sigma^4}{3 (2 \cdot 4)^2} - \frac{g_6 \sigma^6}{4 (2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \dots \right] \\ &+ \frac{g_4 \sigma^4}{u^4 (2 \cdot 4)^2} \left[1 - \frac{g_2 \sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\right) 2^2} + \frac{g_4 \sigma^4}{\left(\frac{4}{2}\right) (2 \cdot 4)^2} - \frac{g_6 \sigma^6}{\left(\frac{5}{2}\right) (2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \dots \right] \\ &- \frac{g_6 \sigma^6}{u^6 (2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \left[1 - \frac{g_2 \sigma^2}{\left(\frac{4}{3}\right) 2^2} + \frac{g_4 \sigma^4}{\left(\frac{5}{3}\right) (2 \cdot 4)^2} - \dots \text{ usw.} \right] \end{aligned} \right] \quad (50)$$

oder mit den Abkürzungen $U_0, U_2, U_4 \dots$ usw. für die Klammerausdrücke:

$$p_u(\sigma) = U_0(\sigma) - g_2 \frac{\tau^2}{2^2} U_2(\sigma) + g_4 \frac{\tau^4}{(2 \cdot 4)^2} U_4(\sigma) - g_6 \frac{\tau^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} U_6(\sigma). \quad (51)$$

U_0 ist offenbar mit $p_\infty(\sigma)$ nach (49b) identisch. Für die anderen Funktionen $U_2, U_4 \dots$ erkennen wir aus der Reihenentwicklung die Beziehung:

$$U_2 = \int_0^1 2(1-x) \Lambda_1(\sigma x) dx, \quad U_4 = \int_0^1 2(1-x) \Lambda_2(\sigma x) dx \dots$$

$$U_{2p} = \int_0^1 2(1-x) \Lambda_p(\sigma x) dx. \quad (52)$$

Die Ausführung der Integrale ergibt (Anhang 9):

$$U_{2p} = \frac{2}{\sigma} [I_p(\sigma) - \frac{2p}{\sigma} (1 - \Lambda_{p-1}(\sigma))], \quad I_p(\sigma) = \int_0^\sigma \Lambda_p(\sigma) d\sigma. \quad (53)$$

Die Ausdrücke I_p bekommen wir aus der Rekursionsformel (Anhang 10):

$$(2p-1) I_p = 2p I_{p-1} - \sigma \Lambda_p. \quad (54)$$

Die Berechnung der Reihe ist recht bequem, vor allem wenn man zuerst die Glieder $V_n = g_n \frac{\sigma^n}{(2 \cdot 4 \dots n)^2} U_n$ berechnet und dann für bestimmtes u zusammenfaßt:

$$p_u(\sigma) = V_0(\sigma) - \frac{1}{u^2} V_2(\sigma) + \frac{1}{u^4} V_4(\sigma) \dots \quad (55)$$

Für große Werte kann man die Näherungsformel (Begründung siehe nächsten Abschnitt)

$$p_u(\sigma) = \frac{2}{\sigma} \left[\chi(\tau) + \frac{1}{\sigma} \Omega(\tau) \right] = \frac{2}{\sigma} \chi(\tau) \quad \begin{matrix} \sigma \geq 10 \\ u \geq 2 \end{matrix} \quad (56)^*$$

verwenden, doch hat es keinen Zweck, die Kurven zu weit fortzusetzen, weil die Streukurven durch den Faktor $\frac{1}{\sigma}$ noch stärker abnehmen und daher nur in einem kleinen σ -Bereich realisierbar sind. Abb. 7 zeigt die $p_u(\sigma)$ für rechteckige Querschnitte. p_{Kreis} fällt bei der Abszissentransformation so nahe mit p_{Quadrat} ebenso wie mit Φ_{Kug} zusammen, daß es nicht besonders eingezeichnet werden konnte. Diese gute Übereinstimmung legt den Gedanken nahe, für gleichmäßigen Querschnitt (Sechseck usw.) ein Analogon zur Guinierschen Näherung einzuführen:

$$\varphi(\sigma) = e^{-\frac{h^2 \sigma^2}{4}}. \quad (57)^*$$

Abb. 4 in l. c. II enthält die Kurve für die unendliche Kugelreihe (l. c. II, l. c. III). Die sprunghaften Änderungen bei $\sigma = 2\pi$, $4\pi \dots$ usw. hängen offenbar mit dem periodischen Aufbau zusammen. Da in der Natur sehr lange Gebilde oft durch Aneinanderlagerung gleichartiger Einzelteilchen entstehen dürften, wollen wir den Einfluß einer Periodizität an Hand des Idealalles eines unendlich dünnen Stäbchens mit periodisch schwankender Belegung diskutieren.

Die Periode nehmen wir als Bezugs- und Vergleichslänge, setzen sie also gleich 1. Setzen wir die periodische Belegung in Form einer *Fourier-Reihe* mit beliebigen Koeffizienten an, dann wird die Abstandsfunktion (normiert auf die Periodenlänge):

$$\psi_p(x) = 1 + c_1^2 \cos 2\pi x + c_2^2 \cos 4\pi x \dots + c_n^2 \cos 2n\pi x \dots \quad (58)$$

Einsetzen in (3) gibt:

$$\tilde{\Phi}(\sigma) = k \int_0^\infty \psi_p(x) \frac{\sin \sigma x}{\sigma x} dx = \frac{k}{\sigma} \int_0^\infty \psi_p\left(\frac{y}{\sigma}\right) \frac{\sin y}{y} dy. \quad (59)$$

Letzteres Integral zerfällt in eine Reihe von Einzelintegralen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy &= \frac{\pi}{2}, & k' &= k \frac{\pi}{2} \\ \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{\sigma} \cdot y\right) \frac{\sin y}{y} dy &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{2\pi n}{\sigma} < 1 \\ 0 & \text{für } \frac{2\pi n}{\sigma} > 1 \end{cases} \quad \text{d. h. } \sigma \begin{cases} > 2\pi n \\ < 2\pi n \end{cases} \\ & \text{d. h. } \sigma \begin{cases} > \\ < \end{cases} n \vartheta_{\text{Bragg}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Das zweite Integral ist identisch mit dem diskontinuierlichen Faktor von *Dirichlet*, woraus sofort unser Ergebnis folgt. Wir haben also folgenden Sachverhalt: Bis zum *Braggschen* Winkel geht das Zusatzglied zu $\frac{k'}{\sigma}$ konstant gleich 1, springt dann um c_1^2 usf. Bei jedem Vielfachen des *Braggschen* Winkels gibt es eine sprunghafte Erhöhung im Betrage c_n^2 . Wir können dies

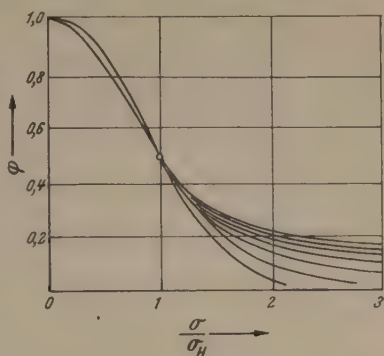


Abb. 7. Stäbchenzusatzfunktionen $\varphi(z)$ für rechteckigen Querschnitt mit $u = 1, 2, 3, 5, 10, \infty$. Reihenfolge wie in Abb. 3, 4, 6. Die Kurve für kreisförmigen Querschnitt fällt praktisch mit der Kurve $u = 1$ zusammen.

auch anschaulich interpretieren. Die maximale Phasendifferenz der Periode ist gleich σ . In allgemeiner Lage kann der Gangunterschied nur kleiner sein; die Reflexion geht also zu größeren Winkeln. Bei jedem Vielfachen des *Braggschen* Winkels beginnt eine neue Ordnung der Reflexion, daher die sprunghafte Erhöhung. Praktisch wird man allerdings einen derartigen sägeblattähnlichen Verlauf der Streukurve nicht erwarten können, denn es ist experimentell unmöglich, mit unendlich fein ausgeblendeten Strahlen zu arbeiten. Durch die endliche Dicke des Primärstrahls tritt eine Verschmierung der Streukurve auf. Für den bisher verwendeten Fall eines spaltförmig ausgeblendeten Primärstrahls findet sich eine eingehende Diskussion dieser sogenannten Spaltverschmierung in I. c. II. Übrigens wurde an einer Hämocyaninlösung der erste Buckel an der Intensitätskurve beobachtet, was möglicherweise auf einen periodischen Aufbau schließen läßt⁹⁾.

Übrigens muß auch jede Ungleichheit der Teilchen sowie Verschiedenheit der Wellenlängen eine Verwischung der Kurven bewirken.

5. Plättchen.

Wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, bleibt auch bei unendlicher Ausdehnung in einer Dimension noch eine Streuung bei beobachtbaren Winkeln bestehen. Wir wollen nun einen Schritt weitergehen und zweifach unendlich ausgedehnte Körper (Plättchen) betrachten. Zu diesem Zwecke gehen wir zunächst von einem Spezialfall aus.

Für eine dicke Kreisscheibe haben wir Formel (36) gefunden:

$$\Phi = \frac{8}{\mu^2} \left\{ \chi(\sigma) + \frac{1}{\mu} I_1(\mu) \Omega(\sigma) - \Lambda_1(\mu) \right\}, \quad \chi(\sigma) = \left(\frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{2} \right)^2$$

Das Volumverhältnis zur Einheitskugel ist $\frac{1.5}{v^2}$ (Dicke = Vergleichslänge). Lassen wir nun v gegen 0 und damit μ gegen ∞ gehen, dann erhalten wir als Grenzformel:

$$\text{Kreisplatte } \infty: \quad \widetilde{\Phi}(\sigma) = \frac{12}{\sigma^2} \chi(\sigma). \quad (61)$$

Wieder ist das Ergebnis von v und μ unabhängig. χ stellt nach (37) die Streuung einer symmetrisch durchstrahlten Nadel dar. Analog den Stäbchen streut also ein Kreisplättchen so,

⁹⁾ O. Kratky, A. Sekora und H. Friedrich-Frekša, Anz. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, math.-naturwiss. Klasse, 7. III. 1946.

als ob es nur an der Ebene spiegeln würde. Dazu tritt noch ein Abfall der Streukurve mit $\frac{1}{\sigma^2}$. Wenn diese Auffassung den Tatsachen entspricht, dürfte außer der Größe auch die Form des Plättchens keine Rolle spielen. Wir verifizieren dies am Beispiel rechteckiger Plättchen.

Die Zusatzfunktion für ein Stäbchen mit rechteckigem Querschnitt (u) lautet nach (51):

$$\varphi u(\sigma) = U_0 - g_2 \frac{\tau^2}{2^2} U_2 + g_4 \frac{\tau^4}{(2 \cdot 4)^2} U_4 \dots,$$

worin die U_n nach (53), (54) definiert sind. Wir heben aus allen U_n den gemeinsamen Faktor $\frac{2}{\sigma}$ heraus und bezeichnen den Rest mit U'_n :

$$\varphi u(\sigma) = \frac{2}{\sigma} \left\{ U'_0 - g_2 \frac{\tau^2}{2^2} U'_2 + g_4 \frac{\tau^4}{(2 \cdot 4)^2} U'_4 \dots \right\}. \quad (62)$$

Lassen wir bei festgehaltener Dicke (= Vergleichslänge) u und damit σ gegen ∞ gehen, dann werden die U'_n im Grenzfall gleich den I_n , und deren Grenzwerte sind nach der Rekursionsformel (54) gleich:

$$I_0 \rightarrow 1, \quad I_2 \rightarrow 2, \quad I_4 \rightarrow \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}, \quad I_6 \rightarrow \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \dots \quad (63)$$

Die Reihe in (62) geht dann über in die uns bereits bekannte:

$$1 - g_2 \frac{\tau^2}{2!} + g_4 \frac{\tau^4}{4!} - g_6 \frac{\tau^6}{6!} \dots = \chi(\tau) \quad (64)$$

Die Streufunktion selbst war:

$$\tilde{\Phi}(\tau) = u \frac{6}{\tau} \varphi_u(\tau), \quad (65)$$

geht also im Grenzfall $u = \infty$ über in

$$\tilde{\Phi}(\tau) = \frac{12}{\tau^2} \chi(\tau), \quad (61')$$

ist also identisch mit (61). Da unser Ergebnis für beliebige rechteckige ebenso wie für kreisförmige Plättchen gilt, dürfen wir wohl allgemein behaupten, daß die Form der Fläche keinen Einfluß mehr hat, sobald sie sehr groß wird. Allerdings gilt (61), bzw. (61') nur als Grenzwert für unendliche Fläche exakt. Es ist aber wichtig zu wissen, wie gut die Annäherung für endliche Teilchen ist. Bei der Kreisplatte haben wir in (36) einen Ausdruck dafür. Bei den Rechteckplatten wollen wir noch eine ähnliche Korrektur für endliches σ anbringen. Bei der numerischen Berechnung von (53), (54) zeigt es sich, daß

bei weitem die größte Abweichung gegenüber dem Grenzfall durch das Glied $\frac{2p}{\sigma} (1 - \Lambda_{p1}(\sigma))$ in (53) entsteht, das wir praktisch gleich $\frac{2p}{\sigma}$ setzen können. Die dadurch bewirkte erste Korrektur bezeichnen wir mit Ω_1 , so daß:

$$\text{Rechteck: } \chi_{\text{kor.}} = \chi + \Omega_1 \quad (66)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sigma} \left\{ g_2 \frac{\tau^2}{2} - g_4 \frac{\tau^4}{2^2 \cdot 4} + g_6 \frac{\tau^6}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} \dots \right\} = \frac{1}{\sigma} \Omega(\tau). \quad (67)$$

Vgl. (36)

Es ergibt sich also dieselbe Ergänzung wie bei der Kreisplatte, nur hat sie dort noch den Faktor $I_1(\mu) \sim 2$, offenbar weil die Fläche in beiden Dimensionen endlich ist, während wir bei der Lamelle die Länge unendlich belassen haben. Jedenfalls ist die Korrektur so klein, daß wir (61) ohne weiteres als Näherung für reale Plättchen verwenden können (vgl. auch (56)*).

Die Funktionen χ und Ω sind in Abb. 5 dargestellt. Der steile Verlauf von χ in Verbindung mit $\frac{1}{\sigma^2}$ läßt eine merkliche Streuintensität nur in einem kleinen Winkelbereich erwarten.

Auswertung der Intensitätskurven.

Bis jetzt wurde gezeigt, wie man auf Grund von einfachen Voraussetzungen die Streukurven verschieden geformter Teilchen berechnen kann. Wir stehen nun vor der umgekehrten Aufgabe, aus einer experimentell gewonnenen Intensitätskurve auf Form und Größe der vorliegenden Teilchen rückzuschließen. Offenbar ist dies nur durch Vergleich mit einer großen Anzahl berechneter Kurven möglich. Nehmen wir an, es wäre gelungen, die Intensitätskurve mit der Kurve für ein Ellipsoid mit $v=2$ zu identifizieren. Dann entspricht einem Punkt mit gemessenem Winkel ϑ ein bestimmtes μ der berechneten Streukurve. Aus dem Zusammenhang zwischen μ und ϑ ergibt sich sofort die Länge L und damit alle Abmessungen des Teilchens. Als Vergleichspunkt werden wir aus Zweckmäßigkeitsgründen immer den Halbwertspunkt verwenden. In Wirklichkeit wird es aber nicht möglich sein, die Intensitätskurve mit einer bestimmten Vergleichskurve genau zur Deckung zu bringen. Dann ist die Formbestimmung nur innerhalb gewisser Grenzen möglich. Damit ist aber auch eine Unsicherheit in der Bestimmung der Größe verbunden. Selbst wenn wir die Länge exakt aus der Kurve entnehmen könnten, würde die Dicke nur ungenau bestimmt sein, und umgekehrt. Denn daß wir unser μ auf die Länge bezogen haben, war eigentlich willkürlich und beweist noch nicht, daß dieser eine besondere Be-

deutung zukommt. Wir stellen uns daher als erstes die Frage, welche Abmessung man am genauesten aus der Intensitätskurve entnehmen kann. Nach der *Guinierschen* Näherung wäre dies der Streumassenradius. In diesem Fall müßten sich alle Kurven zur Deckung bringen lassen. Eine Formbestimmung wäre dann unmöglich. Wie wir gesehen haben, können aber die Abweichungen bei gestreckten Teilchen nicht mehr vernachlässigt werden. Stellen wir wie bisher die Streukurven als Funktion von μ (bezogen auf Länge) dar, so müssen wir, um die Halbwertspunkte zur Deckung zu bringen, eine Abszissentransformation durchführen, für die der Faktor zwischen 1 und etwa $\frac{1}{2}$ schwankt. Hätten wir σ (bezogen auf Dicke) als Variable verwendet, würde der Transformationsfaktor alle Werte zwischen 1 und ∞ haben können. Eine Unsicherheit in der Bestimmung der Form hat dann einen sehr großen Spielraum für die Annahme des Transformationsfaktors zur Folge, während im ersten Fall der Unterschied nur gering ist. Damit ist unsere Frage auch schon entschieden. Wir können bei globularen Teilchen in erster Linie nur die Länge bestimmen, während die Dicke erst aus dem Verhältnis v folgt und daher wesentlich davon abhängt, mit welcher Genauigkeit die Form der Kurve ausgewertet werden kann. Allerdings haben wir dabei vorausgesetzt, daß der charakteristische Teil der Streukurve (der den Wendepunkt und Halbwertspunkt enthält), vorliegt. Das wird aber nur dann der Fall sein, wenn die Länge einen gewissen Wert nicht überschreitet ($\sim 10^3 \text{ \AA}$). Halten wir die Länge unter dieser Grenze fest, so wird das Volumen sehr gestreckter Teilchen und entsprechend auch die Streuintensität klein werden. Praktisch werden wir es daher in diesem Fall nur mit kleinen Streckungsgraden zu tun haben. Anders liegen die Verhältnisse bei Stäbchen und Plättchen. Hier hängt die Streuung von der Länge, bzw. dem Durchmesser nicht mehr ab. Aus den Zusatzfunktionen ρ , bzw. χ erhalten wir nur die Dicke. Dies steht scheinbar in Widerspruch zu dem oben Gesagten. In Wirklichkeit haben wir es in beiden Fällen mit derselben Streukurve zu tun. Ein Zylinder mit z. B. $v = 10$ hat nur eine Streukurve, unabhängig von der Größe. Ist die Länge z. B. 500 \AA und die Dicke entsprechend klein, dann erscheint der charakteristische Teil der Streukurve, wie er in Abb. 4 zu sehen ist. Ist aber z. B. die Dicke 500 \AA und die Länge 5000 \AA , dann entsprechen demselben Winkelbereich die 10mal so großen μ -Werte. Der Halbwertspunkt ist zu unmeßbar kleinen Winkeln gerückt. Wir haben die Streukurve eines Stäbchens vor uns.

Wir werden so zu einer Dreiteilung der streuenden Systeme geführt:

1. Globulare Körper, 2. Stäbchen, 3. Plättchen.

Zur Unterscheidung haben wir ein einfaches Kriterium. Wir multiplizieren die Intensitätskurve mit ϑ durch. Im Falle 1 erhalten wir eine Kurve mit einem Maximum. Der zweite Ast ist um so flacher, je mehr die Teilchen von der Kugelgestalt abweichen (Abb. 8). Bei Vorliegen von Stäbchen oder Plättchen

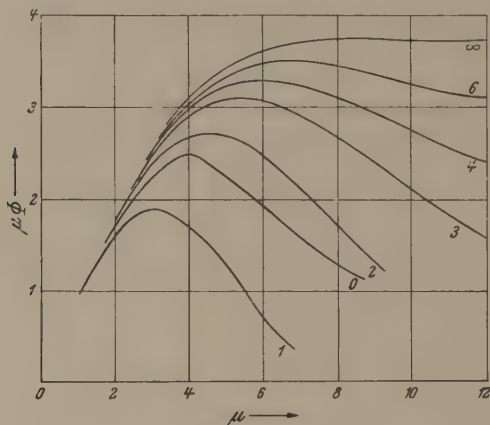


Abb. 8. Streukurven von Ellipsoiden; mit μ multipliziert.
 $v = 0, 1, 2, 3, 4, 6, \infty$.

ist das Maximum zu unmeßbar kleinen Winkeln gerückt. Wir haben eine monoton fallende Kurve vor uns, eben die Zusatzfunktion. Nochmalige Multiplikation mit ϑ ergibt bei Stäbchen Kurven mit Maxima wie oben, bei Plättchen die Zusatzfunktion χ . Damit verbinden wir eine Näherungsmethode zur Bestimmung des Halbwertspunktes. Dieser läßt sich nämlich nicht direkt aus der Kurve entnehmen, weil die Intensität beim Winkel 0 nicht gemessen werden kann.

Wir benützen wieder die Ähnlichkeit unserer Streukurven und Zusatzfunktionen mit einer Gaußschen Glockenkurve $e^{-h^2 x^2}$. Für den Halbwertspunkt und das Maximum von $x e^{-h^2 x^2}$ finden wir leicht:

$$x_H = \frac{1}{h} \sqrt{\ln 2}, \quad x^* = \frac{1}{h \sqrt{2}}, \quad x_H : x^* = \sqrt{\ln 2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\ln 4} = 1,18.$$

Letzteres Verhältnis ist auch für unsere Kurven mit guter Näherung erfüllt, wie sich bei der praktischen Durchrechnung zeigte. Nur bei stark gestreckten, globularen Teilchen verschiebt sich der Wert von 1,18 gegen 1. Gerade dieser Fall hat aber nur geringe praktische Bedeutung (siehe oben!). Zur Bestimmung des Maximums verwenden wir zweckmäßig eine Interpolationsformel. Die drei höchsten Punkte mögen die Abszissen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ (mit dem Intervall d) und die Ordinaten $y_1,$

y_2, y_3 besitzen. Legt man durch die drei Punkte eine Parabel 2ter Ordnung, dann ist die Abszisse des Maximums:

$$\vartheta^* = \vartheta_2 + \frac{d}{2} \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3 - y_1} \quad (68)^*$$

und wir erhalten sofort den Halbwertswinkel

$$\vartheta_H = 1,18 \vartheta^*. \quad (69)^*$$

Eine wertvolle Ergänzung erhalten wir, wenn wir das Teilchenvolumen in unsere Betrachtungen einbeziehen (l. c. III). Die Kugelstreuakurve hat den Halbwertspunkt etwa bei $\mu_H = 3,63$. Der gemessene Halbwertswinkel liege bei $2 \vartheta_H$. Dann ergibt sich aus der Definition von μ für den Radius und das Volumen der Kugel:

$$R = \frac{\mu_H}{4\pi} \frac{\lambda}{2 \vartheta_H}, \quad V_{\text{Kug}} = \frac{\mu_H^3}{48\pi^2} \left(\frac{\lambda}{2 \vartheta_H} \right)^3 = 0,101 \left(\frac{\lambda}{2 \vartheta_H} \right)^3. \quad (70)$$

Ein Ellipsoid (v) hat den Halbwertspunkt bei einem größeren μ -Wert:

$$\mu_{H\text{Ell}} = \mu_{H\text{Kug}} \frac{1}{f_v}, \quad f_v < 1. \quad (71)^{10)}$$

Bei Ellipsoiden ist also die große Halbachse $a = \frac{R}{f_v}$, die kleine Halbachse $b = R f_v$; dementsprechend erhalten wir für das Volumen:

$$\begin{aligned} \text{a) } v > 1 \quad V_v &= \frac{1}{f_v^3 v^2} V_{\text{Kug}} = F_v \cdot V_{\text{Kug}}, \\ \text{b) } v < 1 \quad V_v &= \frac{v}{f_v^3} V_{\text{Kug}} = F_v \cdot V_{\text{Kug}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Die Volumfaktoren F_v sind in Abb. 9 gegen v aufgetragen. Die Kurve zeigt bei $v = 1$, d. h. der Kugel, ein deutliches Maximum. Dasselbe Bild erhalten wir für Zylinder und Prismen. Von allen Körpern, die zum selben Halbwertswinkel streuen, hat also die Kugel das größte Volumen. Für ein kleineres Volumen haben wir zwei Möglichkeiten zur Auswahl: einen gestreckten und einen abgeplatteten Körper. Die Entscheidung ist dann nach der Form der Streukurve oder nach anderen physikalischen Daten (Strömungsdoppelbrechung usw.) zu treffen.

Die Volumkurve in Abb. 9 hat übrigens noch eine zweite Bedeutung. Wie wir gesehen haben, ist die Intensität beim Winkel 0 proportional dem Volumen. Dasselbe muß daher auch für den Halbwertswinkel gelten. Der Volumfaktor F_v stellt also zugleich ein Maß für die Intensität der Streuung dar.

¹⁰⁾ In l. c. III ist der Transformationsfaktor etwas anders definiert (die Abszisse des Halbwertspunktes ist willkürlich gleich eins gesetzt). Auf das Endergebnis hat dies keinen Einfluß.

Man sieht nun unmittelbar, daß globulare Teilchen mit starker Abweichung von der Kugelgestalt kaum in Erscheinung treten werden. Für Stäbchen und Plättchen scheiden Volumsbetrachtungen von vornherein aus. Wir könnten höchstens für den Stäbchenquerschnitt analoge Betrachtungen anstellen. Praktisch

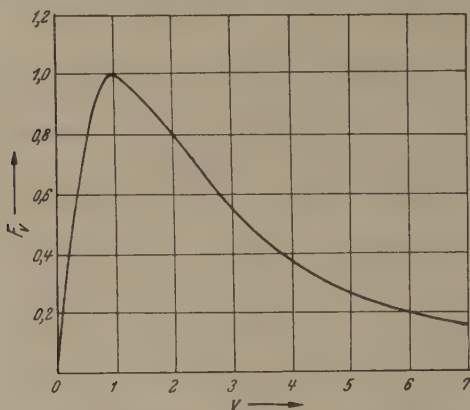


Abb. 9. Abhängigkeit des Volumfaktors F_v von v bei Ellipsoiden.

jedoch haben wir davon keinen Nutzen, weil der Querschnitt nicht selbständig bestimmt werden kann. Jedenfalls muß das Volumen von Stäbchen und Plättchen sehr groß sein.

Wir fassen nun nochmals kurz die gewonnenen Ergebnisse zusammen. Danach zerfällt die Auswertung einer Intensitätskurve in drei Teile:

1. Bestimmung des allgemeinen Typus. Die vorgelegte Kurve wird punktweise mit \mathfrak{V} durchmultipliziert. Erhalten wir ein Maximum, liegen globulare Teilchen vor. Gleichzeitig gestattet die Steilheit des rechten Astes eine rohe Abschätzung des Deformationsgrades (Abb. 8). Ist die abgeleitete Kurve monoton fallend, so wird sie nochmals punktweise mit \mathfrak{V} multipliziert. Ein Maximum zeigt Stäbchen an. Andernfalls liegen Plättchen vor. Eine dritte Multiplikation mit \mathfrak{V} muß jetzt ein Maximum liefern.

2. Vergleich mit den berechneten Kurven. Die Abszisse des ersten Maximums, multipliziert mit 1,18, liefert den Halbwertspunkt. Dieser wird durch Koordinatentransformation mit dem entsprechenden Punkt in den Vergleichsdiagrammen zur Deckung gebracht. Die am besten passende Vergleichskurve zeigt die Form des Teilchens, bzw. des Querschnitts an. (Für Plättchen gibt es nur eine Kurve.) Aus μ_H (der Tabelle entnommen) und \mathfrak{V}_H erhalten wir L :

$$L = \frac{\mu_H}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{2\mathfrak{V}_H} \quad (73)$$

3. Vergleich der Volumina (nur bei globularen Teilchen),

- a) Wir berechnen das Volumen nach (72) und vergleichen es zur Kontrolle mit unabhängig davon bestimmten Werten.
 b) (ohne Benützung von Vergleichsdiagrammen). Aus dem bekannten Teilchenvolumen und ϑ_H erhalten wir F_v :

$$F_v = 10 V \cdot \left(\frac{2 \vartheta_H}{\lambda} \right)^3; \quad (74)$$

aus Diagramm 9 finden wir dazu zwei v -Werte, zwischen denen auf Grund anderer physikalischer Messungen entschieden werden muß.

Eine genaue Durchführung dieses Auswertungsverfahrens setzt eine größere experimentelle Genauigkeit voraus, als bis jetzt erreicht wurde. Man sieht aber, daß die Kleinwinkel-methode prinzipiell in der Lage ist, über Form und Größe kolloider Teilchen Aussagen zu machen. Die Methode wird in dem Maße an Bedeutung gewinnen, wie es gelingt, die experimentelle Genauigkeit zu steigern.

Zusammenfassung.

1. Problemstellung und kurze Präzisierung der Aufgabe.
 Drei Voraussetzungen werden als Grundlage der folgenden Berechnungen eingeführt.
2. Entwicklung der Methoden.
 - a) Die Streuung wird als Interferenzerscheinung der vom ganzen Volumen ausgehenden Streuwellen betrachtet und die Intensität über alle Lagen gemittelt.
 - b) Die *Debyesche* Theorie der Röntgenbeugung an Gasen wird auf kontinuierlich verteilte Streuzentren übertragen. Einführung der Abstandstatistik.
 - c) Die Streufunktion wird in Form einer universellen Reihe dargestellt. Es wird gezeigt, daß die Koeffizienten durch einfache geometrische Betrachtungen gewonnen werden können.
3. Berechnung der Streukurven für verschiedene Körperklassen.
 Die obigen Methoden werden angewendet auf:
 - a) Rotationsellipsoide,
 - b) Zylinder,
 - c) Prismen.

Die Abhängigkeit der Streuung von der Teilchengröße wird kurz diskutiert und gezeigt, daß auch bei Unendlichwerden von ein oder zwei Dimensionen eine vergleichbare Streuung erhalten bleibt. Die beiden Grenzfälle:

- d) Stäbchen,
- e) Plättchen,

werden durchgerechnet. Der Einfluß eines periodischen Aufbaues wird an einem Idealmodell gezeigt.

4. Auswertung der Streukurven. Es ergibt sich eine Dreiteilung hinsichtlich der Steilheit der Streukurve in:
 - a) globulare Körper,
 - b) Stäbchen,
 - c) Plättchen.

Es wird gezeigt, daß außer der Form bei ersteren hauptsächlich die Länge, bei den beiden anderen die Dicke aus dem Experiment zu entnehmen ist. Eine Näherungsmethode zur Bestimmung des Halbwertpunktes wird eingeführt. Ergänzung der Auswertung durch Heranziehung des Volumens. Kurze Zusammenfassung des Vorganges bei der Auswertung.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterführung einer Abhandlung von O. Kratky über den Zusammenhang zwischen Teilchenform und Kleinwinkelstreuung (I. c. II) dar. Herrn Professor Kratky bin ich für die Anregung zu dieser Untersuchung sowie zahlreiche wertvolle Hinweise zu größtem Dank verpflichtet.

Anhang.

1. Abstandsfunktion von a) Kreisscheibe, b) Kugel (zu 6 b, c).
Bezugslänge = Durchmesser = 1:



Abb. 10. $x = \cos \alpha$, $\sqrt{1-x^2} = \sin \alpha$.

$$a) F = \frac{\pi}{4}; F_{\bar{x}} = \frac{1}{4} 2\alpha - \frac{1}{4} 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\arccos x - x \sqrt{1-x^2})$$

unabhängig von Richtung \bar{x}

$$\psi(x) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} (\arccos x - x \sqrt{1-x^2}) x \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{\pi} x (\arccos x - x \sqrt{1-x^2});$$

$$b) V = \frac{\pi}{6}; V_{\bar{x}} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{4} (1-x)^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{12} (1-x)^2 (2+x)$$

unabhängig von Richtung \bar{x}

$$\psi(x) = \frac{36}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{12} (1-x)^2 (2+x) x^2 \int d\Omega = 12 x^2 (1-x)^2 (2+x) - 12 x^2 (2-3x+x^3).$$

2. Streufunktion von a) Nadel, b) Scheibe, c) Kugel (zu 7 a, b, c):

$$a) \Phi(\mu) = \int_0^1 2(1-x) \frac{\sin \mu x}{\mu x} dx = \frac{2}{\mu} \left[\text{Si}(\mu x) - \frac{1}{\mu} \cos \mu x \right]_0^1 = \frac{2}{\mu} \left(\text{Si} \mu - \frac{1 - \cos \mu}{\mu} \right);$$

$$b) \Phi(\mu) = \int_0^1 \frac{16}{\pi} x (\arccos x - x \sqrt{1-x^2}) \frac{\sin \mu x}{\mu x} dx = \frac{16}{\pi \mu} \int_0^1 (\arccos x - x \sqrt{1-x^2}) \sin \mu x dx,$$

$$\int_0^1 \arccos x \cdot \sin \mu x dx = -\frac{1}{\mu} [\arccos x \cdot \cos \mu x]_0^1 +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \int_0^1 \cos \mu x d(\arccos x) = \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\mu \cos \alpha) d\alpha =$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\pi}{2} (1 - J_0(\mu)),$$

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} \sin \mu x dx = -\frac{1}{3} [(1-x^2)^{3/2} \sin \mu x]_0^1 + \frac{\mu}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} \cos \mu x dx =$$

$$\frac{\mu}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 J_2(\mu) = \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{2} J_2(\mu);$$

$$\Phi(\mu) = \frac{16}{\pi} \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{2} (1 - J_0(\mu) - J_2(\mu)) = \frac{8}{\mu^2} (1 - \Lambda_1(\mu)).$$

J_0, J_1, J_2 Bessel-Funktionen 0ter, 1ter, 2ter Ordnung.

$$c) \Phi(\mu) = \int_0^1 12x^2(2-3x+x^3) \frac{\sin \mu x}{\mu x} dx = \frac{12}{\mu^2} \int_0^{\mu} \left(2 \frac{y}{\mu} - 3 \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{y^4}{\mu^4} \right) \sin y dy,$$

$$\int_0^{\mu} y \sin y dy = -\mu \cos \mu + \sin \mu,$$

$$\int_0^{\mu} y^2 \sin y dy = -\mu^2 \cos \mu + 2\mu \sin \mu + 2 \cos \mu - 2,$$

$$\int_0^{\mu} y^4 \sin y dy = -\mu^4 \cos \mu + 4\mu^3 \sin \mu + 12\mu^2 \cos \mu - 24\mu \sin \mu -$$

$$- 24 \cos \mu + 24;$$

$$\Phi(\mu) = \frac{12}{\mu^2} \left[\frac{2}{\mu} (\sin \mu - \mu \cos \mu) - \frac{3}{\mu^2} (-2 + 2 \cos \mu + 2\mu \sin \mu - \mu^2 \cos \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu^4} (24 - 24 \cos \mu - 24\mu \sin \mu + 12\mu^2 \cos \mu + 4\mu^3 \sin \mu - \mu^4 \cos \mu) \right],$$

$$= \frac{12}{\mu^6} [24 + 6\mu^2 - 24\mu \sin \mu + 6\mu^2 \cos \mu - 24 \cos \mu],$$

$$= \frac{72}{\mu^6} [\mu^2 + 4 - 4\mu \sin \mu + (\mu^2 - 4) \cos \mu] = \frac{9}{\mu^6} \left[\sin \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2} \right]^2.$$

3. Integral der Kugelstreuung (zu 17):

$$F = \int_0^{\mu} \Phi_{\text{Kug}}(y) dy = 72 \int_0^{\mu} \left[\frac{1}{y^4} + \frac{4}{y^6} - \frac{4}{y^5} \sin y + \left(\frac{1}{y^4} - \frac{4}{y^6} \right) \cos y \right] dy,$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dy}{y^4} &= -\frac{1}{3} \frac{1}{y^3}, & \int \frac{dy}{y^6} &= -\frac{1}{5} \frac{1}{y^5}, \\
 \int \frac{\cos y}{y^6} dy &= -\frac{1}{5} \frac{\cos y}{y^5} - \frac{1}{5} \int \frac{\sin y}{y^5} dy, \\
 \int \frac{\sin y}{y^5} dy &= -\frac{1}{4} \frac{\sin y}{y^4} + \frac{1}{4} \int \frac{\cos y}{y^4} dy, \\
 \int \frac{\cos y}{y^4} dy &= -\frac{1}{3} \frac{\cos y}{y^3} + \frac{1}{6} \frac{\sin y}{y^2} + \frac{1}{6} \frac{\cos y}{y} + \frac{1}{6} \text{Si } y; \\
 F &= 72 \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{y^3} - \frac{4}{5} \frac{1}{y^5} + \frac{4}{5} \frac{\cos y}{y^5} + \frac{4}{5} \frac{\sin y}{y^4} - \frac{1}{15} \frac{\cos y}{y^3} + \frac{1}{30} \frac{\sin y}{y^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{30} \frac{\cos y}{y} + \frac{1}{30} \text{Si } y \right]_0^\mu, \\
 &= \frac{12}{5} \left[\text{Si } \mu + \frac{\cos \mu}{\mu} + \frac{\sin \mu}{\mu^2} - 2 \frac{\cos \mu}{\mu^3} + 24 \frac{\sin \mu}{\mu^4} + 24 \frac{\cos \mu}{\mu^5} - \frac{10}{\mu^3} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{24}{\mu^5} \right] \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \frac{6}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

4. $\omega(\sigma)$ von Kreiszylinder (zu 30):

$$\begin{aligned}
 \omega(\sigma) &= \frac{d}{d\sigma} [\sigma \Phi(\sigma)] = \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{8}{\sigma} (1 - \Lambda_1(\sigma)) \right], \\
 &= -\frac{8}{\sigma^2} (1 - \Lambda_1(\sigma)) + \frac{8}{\sigma} \cdot \frac{2}{\sigma} J_2(\sigma) = 2 \Lambda_2(\sigma) \stackrel{!}{=} \Phi \text{ Scheibe}(\sigma) = \\
 &= \frac{8}{\sigma^2} (3 J_2(\sigma) + J_0(\sigma) - 1).
 \end{aligned}$$

5. $\Omega(\sigma)$ von Kreisscheibe (zu 38):

$$\begin{aligned}
 T_2 &= 1 - \frac{I_1}{1!} \cdot 1, \quad T_4 = \frac{1}{3} - \frac{I_1}{1!} \cdot \frac{1}{2} \dots, \quad T_6 = \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{I_1}{1!} \frac{1}{2 \cdot 4} \dots \text{ usw.} \\
 \Omega(\sigma) &= g_2 \frac{\sigma^2}{2} - g_4 \frac{\sigma^4}{2^2 \cdot 4} + g_6 \frac{\sigma^6}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} \dots, \\
 &= \int_0^1 2(1-x) \cdot \sigma x J_1(\sigma x) dx = \frac{2}{\sigma} \int_0^\sigma \left(y - \frac{y^2}{\sigma} \right) J_1(y) dy, \\
 &= \frac{2}{\sigma} \left\{ - \left[\left(y - \frac{y^2}{\sigma} \right) J_0(y) \right]_0^\sigma + \int_0^\sigma \left(1 - 2 \frac{y}{\sigma} \right) J_0(y) dy \right\}, \\
 \int_0^\sigma J_0(y) dy &= I_0(\sigma) = 2 [J_1(\sigma) + J_3(\sigma) + J_5(\sigma) \dots]; \quad \int_0^\sigma y J_0(y) dy = \sigma J_1(\sigma); \\
 \Omega(\sigma) &= \frac{2}{\sigma} [I_0(\sigma) - 2 J_1(\sigma)].
 \end{aligned}$$

$$6. I_1(\mu) = \int_0^\mu \Lambda_1(x) dx = 2(I_0(\mu) - J_1(\mu)) \quad (\text{zu 39}):$$

$$\int_0^\mu \Lambda_1(x) dx = \int_0^\mu [J_0(x) + J_2(x)] dx = I_0(\mu) + \int_0^\mu J_2(x) dx,$$

$$\int_0^\mu J_2(x) dx = 2[J_3(\mu) + J_5(\mu) + J_7(\mu) \dots] = I_0(\mu) - 2J_1(\mu);$$

$$I_1(\mu) = 2I_0(\mu) - 2J_1(\mu).$$

7. $\omega(\sigma)$ einer unendlich dünnen Rechteckplatte (zu 42):

$$\begin{aligned} \omega(\sigma) &= \int_0^1 2(1-x) \cos \sigma x \cdot dx = \frac{2}{\sigma} \int_0^\sigma \left(1 - \frac{y}{\sigma}\right) \cos y dy, \\ &= \frac{2}{\sigma} \left\{ \left[\left(1 - \frac{y}{\sigma}\right) \sin y \right]_0^\sigma + \int_0^\sigma \frac{\sin y}{\sigma} dy \right\} = \frac{2}{\sigma^2} (1 - \cos \sigma) = \left(\frac{\sin \frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

8. $\omega(\sigma)$ eines rechteckigen Prismas (zu 44):

$$\text{Rechteck: } \Phi_u(\sigma) = \frac{2}{\sigma} \left[S_0(\sigma) - \frac{g_2}{u^2} \frac{\sigma^2}{2} S_2(\sigma) + \frac{g_4}{u^4} \frac{\sigma^4}{2 \cdot 4} S_4(\sigma) \dots \right] \quad (\text{siehe 24})$$

$$\frac{d}{d\sigma} S_0(\sigma) = \frac{1}{2} X(\sigma), \quad \frac{d}{d\sigma} [\sigma^2 S_2(\sigma)] = \sigma S_0(\sigma), \quad \frac{d}{d\sigma} [\sigma^4 S_4(\sigma)] = \sigma^3 S_2(\sigma) \quad (\text{siehe 25})$$

$$\begin{aligned} \omega_u(\sigma) &= \frac{d}{d\sigma} [\sigma \Phi_u(\sigma)] = X(\sigma) - 2\sigma \left[\frac{g_2}{u^2} \cdot \frac{1}{2} S_0(\sigma) - \frac{g_4}{u^4} \cdot \frac{\sigma^2}{2 \cdot 4} S_2(\sigma) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_6}{u^6} \cdot \frac{\sigma^4}{2 \cdot 4 \cdot 6} S_4(\sigma) \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= X(\sigma) - \frac{\pi_2'}{u} \left[\frac{g_2}{2} \tau - \frac{g_4}{2 \cdot 4} \frac{\tau^3}{2} + \frac{g_6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\tau^5}{2 \cdot 4} \dots \right] + \frac{g_2}{u^2} \frac{\sin \sigma}{\sigma} + \\ &\quad + \frac{2}{u^2} \left[\frac{g_2}{2} - \frac{g_4}{2 \cdot 4} \tau^2 + \frac{g_6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\tau^4}{3} \dots \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{g_2}{2} \tau - \frac{g_4}{2 \cdot 4} \frac{\tau^3}{2} + \frac{g_6}{(2 \cdot 4)^2} \frac{\tau^5}{6} \dots \right] = \Omega(\tau), \quad (\text{siehe Anh. 5})$$

$$\left[\frac{g_2}{2!} - 3 \frac{g_4}{4!} \tau^2 + 5 \frac{g_6}{6!} \tau^4 \dots \right] = \frac{1}{2} \rho(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1 - X(\tau)}{\tau} \right),$$

$$\left[-\frac{1}{\tau^2} + 6 \frac{1 - \cos \tau}{\tau^4} - 2 \frac{\sin \tau}{\tau^3} \right] = \frac{1}{\tau^2} \left[3X(\tau) - 2 \frac{\sin \tau}{\tau} - 1 \right],$$

$$\omega_u(\sigma) = X(\sigma) + \frac{1}{6u^2} \frac{\sin \sigma}{\sigma} - \frac{\pi_2'}{u} \Omega(\tau) + \frac{1}{u^2} \rho(\tau).$$

$$9. U_{2p} = \int_0^1 2(1-x) \Lambda_p(\sigma x) dx = \frac{2}{\sigma} \left[I_p(\sigma) - \frac{2p}{\sigma} (1 - \Lambda_{p-1}(\sigma)) \right] \quad (\text{zu 52, 53})$$

$$U_{2p} = \frac{2}{\sigma} \int_0^{\sigma} \left(1 - \frac{y}{\sigma}\right) \Lambda_p(y) dy,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma} \Lambda_p(y) dy &= I_p(\sigma), \quad \int_0^{\sigma} y \Lambda_p(y) dy = \int_0^{\sigma} \frac{2^p \cdot p!}{y^{p-1}} J_p(y) dy = \\ &= \frac{2^p \cdot p!}{y^{p-1}} J_{p-1}(y) \Big|_0^{\sigma} = 2p \Lambda_{p-1}(y) \Big|_0^{\sigma} = 2p(1 - \Lambda_{p-1}(\sigma)). \end{aligned}$$

$$10. \text{ Rekursionsformel für } I_p = \int_0^{\sigma} \Lambda_p(y) dy: \quad (\text{zu 54})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma} \Lambda_p(y) dy &= \int_0^{\sigma} \frac{2^p \cdot p!}{y^p} J_p(y) dy = \left[-\frac{2^p \cdot p!}{(p-1)y^{p-1}} J_p(y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\sigma} \frac{2^p \cdot p!}{(p-1)y^{p-1}} \left[-\frac{p}{y} J_p(y) + J_{p-1}(y) \right] dy, \right. \end{aligned}$$

$$I_p(\sigma) = -\frac{\sigma}{p-1} \Lambda_p(\sigma) - \frac{p}{p-1} I_p(\sigma) + \frac{2p}{p-1} I_{p-1}(\sigma).$$

$$(2p-1) I_p = 2p I_{p-1} - \sigma \Lambda_p.$$

Tabelle 1. *Ellipsoide*,
 $\phi \cdot 1000$, ab $\mu = 10$ nach (21)* nur auf 2 Stellen berechnet.

| $\frac{r}{\mu}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 10 | ∞ | 0 |
|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------|
| 1 | 951 | 975 | 980 | 981 ₅ | 983 | 983 | 984 | 967 |
| 2 | 816 ₅ | 904 | 922 | 929 | 933 | 935 | 936 ₅ | 875 |
| 3 | 628 | 799 | 836 | 849 | 858 | 863 | 866 | 742 |
| 4 | 426 | 672 | 731 | 753 | 768 | 776 ₅ | 781 | 589 |
| 5 | 249 ₅ | 539 | 619 | 650 | 673 | 685 | 692 | 444 |
| 6 | 119 | 415 | 512 | 552 | 582 | 597 ₅ | 607 | 320 |
| 7 | 42 | 303 | 416 | 463 | 500 | 519 ₅ | 531 | 225 |
| 8 | 8 | 213 | 334 | 387 | 430 ₅ | 454 | 467 | 160 |
| 9 | 0 | 146 | 266 | 325 | 373 | 400 | 416 | 120 |
| 10 | 3 | 98 ₅ | 212 | 273 ₅ | 327 | 356 | 374 | 95 |
| 12 | 7 | 4 ₅ | 13 ₅ | 20 ₅ | 26 ₅ | 28 ₅ | 313 | |
| 14 | 2 | 1 ₅ | 8 ₅ | 14 ₅ | 20 ₅ | 24 ₅ | 269 | |
| 16 | 0 | | 5 ₅ | 10 ₅ | 16 ₅ | 21 ₅ | 235 | |
| 18 | 1 | | 2 ₅ | 7 ₅ | 13 ₅ | 18 ₅ | 209 | |
| 20 | 0 | | | 5 ₅ | 9 ₅ | 15 ₅ | 188 | |
| μ_H | 3,63 | 5,31 | 6,12 | 6,58 | 7,00 | 7,30 | 7,48 | 4,66 |

Tabelle 2. Zylinder.

| $\frac{v}{\mu}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | ∞ | 0 |
|-----------------|-----------------|------|------------------|------|------|------|----------|------------------|
| 1 | 931 | 963 | 968 | 970 | 971 | 972 | 973 | 959 |
| 2 | 748 | 858 | 880 | 888 | 893 | 895 | 897 | 847 |
| 3 | 515 | 713 | 755 | 770 | 781 | 785 | 790 | 686 |
| 4 | 300 | 547 | 616 | 640 | 658 | 664 | 672 | 516 ₅ |
| 5 | 141 | 404 | 486 ₅ | 518 | 542 | 551 | 563 | 362 |
| 6 | 48 | 283 | 378 | 418 | 447 | 458 | 473 | 243 |
| 7 ₅ | 17 ₅ | 194 | 267 | 338 | 348 | 338 | 406 | 164 |
| 8 | | 132 | 283 | 283 | 338 | 338 | 358 | 118 |
| 9 | | 88 | 187 | 239 | 283 | 269 | 323 | 93 |
| 10 ₅ | | 57 | 133 | 203 | 235 | 269 | 295 | 79 |
| 12 | | 19 | 88 | 143 | 194 | 217 | 249 | 58 |
| 14 | | | 98 | 98 | 177 | 177 | 214 | 40 |
| 15 | | | 36 | | 136 | | | |
| 16 | | | | 67 | | 148 | 189 | 31 |
| 18 | | | | | 96 | 123 | 168 | 25 |
| 20 | | | | | | 103 | 152 | 20 |
| μH | 3,06 | 4,33 | 4,89 | 5,18 | 5,44 | 5,54 | 5,70 | 4,17 |

 Tabelle 3. Prismen
mit rechteckiger Grundfläche 1:2.

| $\frac{v}{\mu}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|-----------------|------|------------------|------|------------------|------|------|------------------|
| 1 | 939 | 964 | 969 | 971 | *972 | 972 | 972 |
| 2 | 777 | 865 | 883 | 889 | 894 | 895 | 896 |
| 3 | 571 | 726 | 761 | 773 ₅ | 783 | 786 | 787 ₅ |
| 4 | 338 | 572 | 626 | 646 | 660 | 671 | 671 |
| 5 | 200 | 430 | 499 | 526 | 546 | 553 | 557 |
| 6 | 101 | 314 | 397 | 426 ₅ | 452 | 461 | 465 |
| 7 | 52 | 227 | 313 | 351 | 380 | 391 | 396 |
| 8 | 32 | 166 ₅ | 254 | 295 | 328 | 341 | 347 |
| 9 | | 123 | 209 | 253 | 290 | 304 | 310 |
| 10 | | 91 | 173 | 218 | 258 | 278 | 281 |
| 12 | | 64 ₅ | 114 | 160 | 204 | 223 | 232 |
| 14 | | 24 | 73 | 116 | 163 | 183 | 194 |
| 16 | | | 35 | 84 ₅ | 131 | 154 | 165 |
| 18 | | | | 61 | 106 | 130 | 143 |
| 20 | | | | 24 | 87 | 110 | 124 |
| μH | 3,34 | 4,50 | 5,00 | 5,26 | 5,49 | 5,57 | 5,69 |

Tabelle 4. $\gamma(\sigma)$ für kreisförmigen und rechteckigen Querschnitt.

| $\frac{U}{\sigma}$ | Kreis | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | ∞ |
|--------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------|------------------|----------|
| 1 | 939 | 920 | 949 | 955 | 957 | 958 | 959 | 959 |
| 2 | 774 ₅ | 710 | 811 ₅ | 832 | 839 | 843 | 847 | 849 |
| 3 | 553 | 450 | 625 | 665 | 679 | 686 | 697 | 699 |
| 4 | 333 | 222 | 435 | 493 | 515 | 526 | 540 ₅ | 545 |
| 5 | 159 | 75 ₅ | 276 | 348 | 377 | 391 | 410 | 417 |
| 6 | 50 | 13 | 166 | 244 ₅ | 278 ₅ | 295 | 319 | 328 |
| 7 | 7 | | 100 | 180 | 216 ₅ | 236 | 264 | 274 |
| 8 | 1 | | 73 | 141 | 180 | 201 | 233 | 244 |
| 9 | | | 42 | 111 | 153 | 176 | 211 | 224 |
| 10 | | | 26 | 87 | 128 | 152 | 190 | 205 |
| σ_H | 3,23 | 2,81 | 3,66 | 3,96 | 4,11 | 4,19 | 4,31 | 4,35 |

Experimentelle Überprüfung der Gültigkeit des Stokes-Cunninghamschen Gesetzes an in Stickstoff fallenden Selenkugeln des Durch- messers $6 \cdot 10^{-5}$ — $26 \cdot 10^{-5}$ cm.¹⁾

Von

Hans Schedling, Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 17. Oktober 1947.)

Zusammenfassung.

Die Fallgeschwindigkeit einer Anzahl von Selenkugeln, deren Radien zwischen $3 \cdot 10^{-5}$ und $13 \cdot 10^{-5}$ cm liegen, wird in einem *Ehrenhaftschen* Kondensator bestimmt. Die einzelnen Kugeln werden nach einer von *F. Ehrenhaft* gemeinsam mit *P. Selner* ausgearbeiteten Methode auf eine Glaslamelle niedergeschlagen und mikrophotographiert und ihre photographischen Bilder sodann ausgemessen. Der so erhaltene Radius der Probekörper wird entsprechend den Resultaten, die in der Arbeit über die mikroskopische Größenbestimmung von Selenkugeln²⁾ enthalten sind, korrigiert und liefert nach erfolgter Korrektur einen direkt optisch gewonnenen Radius des jeweils betrachteten Probekörpers. Andererseits wird aus den gemessenen Fallgeschwindigkeiten auf Grund des *Stokes-Cunninghamschen* Widerstandsgesetzes der Radius des einzelnen Probekörpers berechnet. Der Vergleich der direkt optisch gefundenen Radien mit den aus dem Widerstandsgesetz berechneten zeigt, daß für die herrschenden Versuchsbedingungen das *Stokes-Cunninghamsche* Gesetz mit einer Konstante $A = 0,8$ gut anwendbar ist.

Einleitung.

Sowohl *Ehrenhaft* als *Millikan* benützen zur Auswertung ihrer Versuche betreffend die Ladungsbestimmung kleiner Körper zunächst die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Sie gehen von dem Ansatz aus, daß auf Grund des Reibungswiderstandes die Fall- und Steiggeschwindigkeit der betrachteten kleinen Probekörper

¹⁾ Die vorliegende Arbeit ist eine Teilveröffentlichung der Dissertation des Verfassers. Durch die Ereignisse des Jahres 1938 und den Kriegsausbruch war die Publikation der Dissertation verhindert worden und die in ihr enthaltenen Ergebnisse wurden nur teilweise durch *F. Ehrenhaft* in der *Physikalischen Zeitschrift* **39**, 1938, Heft 19, und in *Philosophy of Science*, Vol. 8, July 1941, veröffentlicht.

²⁾ *H. Schedling*, Mikroskopische Größenbestimmung von Selenkugeln, deren Radius zwischen $3 \cdot 10^{-5}$ cm und $35 \cdot 10^{-5}$ cm liegt, *Acta Physica Austriaca*, Bd. II, 1948, Heft 1.

gleichförmig und der auf sie wirkenden Kraft proportional ist:

$$v = B \cdot P.$$

Für die Berechnung der Beweglichkeit B (Geschwindigkeit Krafteinheit) wird von beiden Autoren das *Stokessche* Gesetz

$$B = 1/6 a \pi \eta,$$

bzw. das *Stokes-Cunninghamsche* Gesetz

$$B = 1/6 a \pi \eta (1 + A l/a)$$

herangezogen. In diesem Gesetz bedeutet η den Koeffizienten der inneren Reibung des Gases, a den Kugelradius, l die mittlere freie Weglänge des Gasmolekels und A eine vom Gas und dem Material der Kugel abhängige Konstante die mit der Gleitung des Gases an der Oberfläche der Kugel zusammenhängt.

Dem *Stokesschen* Gesetz liegt die Annahme zugrunde, daß keinerlei Gleitung zwischen der Kugel und der sie umgebenden Mediumsschicht vorhanden ist. Gerade diese Annahme aber trifft bei den in dieser Arbeit in Betracht kommenden Probekörpern nicht mehr zu, da das Medium hier ein Gas ist, dessen mittlere freie Weglänge l durchaus vergleichbar mit dem Radius des Probekörpers ist und daher im Sinne von *Stokes* nicht mehr als kontinuierliches Medium aufgefaßt werden kann.

Die von *E. Cunningham* theoretisch versuchte Erweiterung des *Stokesschen* Gesetzes gilt jedoch nur für den Fall, daß

$$l/a \ll 1$$

ist. Die Konstante A besitzt einen Wert, der theoretisch nicht abgeleitet werden kann und von dem nur die untere Grenze bekannt ist. Man weiß, daß A größer als 0,7 sein muß, wenn man die *Boltzmannsche* Definition der mittleren freien Weglänge verwendet

$$\eta = 0,35 \cdot \rho \cdot \bar{c} \cdot l^3).$$

Gerade aber für den hier vorliegenden Fall, daß der Radius von der gleichen Größenordnung ist wie die mittlere freie Weglänge, existiert kein theoretisches Gesetz. Wohl haben *Knudsen* und *Weber*⁴⁾ empirisch durch Beobachtungen von im Vakuum schwingenden Glaskugeln für den Fall $l/a \sim 2$ einen Ausdruck für die Beweglichkeit aufgestellt, allein exakt gilt dieser nur für Glasteilchen in Luft bei niederen Drücken.

Um nun den *Stokes-Cunninghamschen* Ansatz zu überprüfen und die Größe der Konstanten A experimentell festzustellen, schlug man folgenden Weg ein: Es wurden Probekörper, deren v_f (Fallgeschwindigkeit) gemessen worden war, mit ultravioletem Licht mikrophotographiert und ihre scheinbare Größe bestimmt,

³⁾ P. S. Epstein, Phys. Rev. **23**, 710, 1924.

⁴⁾ M. Knudsen und S. Weber, Ann. d. Phys. **36**, 981, 1911.

durch sinngemäße Anwendung der optischen Korrekturen, wie sie aus der Arbeit *Schedlings*²⁾ resultierten, konnte der wahre Radius ermittelt werden und aus ihm und der Fallgeschwindigkeit die Konstante A und die Beweglichkeit B nach folgendem Zusammenhang bestimmt werden

$$v_f = 2,9 a^2 \sigma g_{11} (1 + A l/a).$$

Dies soll nun im folgenden ausgeführt werden.

Die Erzeugung der Probekörper, ihre mikrophotographische Verarbeitung und Ausmessung.

In einem Quarzrohr wurde Selen (selenium pur. in Perlen) durch Erhitzen mit einem kleinen Flämmchen verdampft; das verdampfte Selen kondensiert in der Luft und wird durch einen Stickstoffstrom in einen *Ehrenhaftschen* Kondensator geblasen. In diesem werden die so erzeugten Probekörper beobachtet und ihre Fallzeiten gemessen. Hierauf werden sie durch Neigen des Kondensators nach vorne gegen den Beobachter getrieben und unter steter Beobachtung auf eine an die Kondensatorplatte geklebte Uviolglaslamelle niedergeschlagen⁵⁾.

Die niedergeschlagenen Einzelteilchen werden sodann mit ultraviolettem Licht mikrophotographiert, ihre photographischen Aufnahmen mit Hilfe eines Komparatormikroskops ausgemessen und die Resultate der Ausmessung korrigiert.

Die Ausmessung erfolgt in zwei aufeinander normal stehenden Richtungen je dreimal von den verschiedenen Beobachtern. Zweck der öfteren Ausmessung ist die Eliminierung der störenden Eigenschaften der photographischen Platte (Körnigkeit).

Die Resultate der Ausmessung.

Die ausgemessenen Probekörper entstammen dem Radienintervall $3 \cdot 10^{-5}$ bis $13 \cdot 10^{-5}$ cm. Diese obere Grenze ist durch die zur Verfügung stehende Spannung am Kondensator und dessen Dimensionierung begründet. Als mikroskopische Korrektur wurde ein Mittelwert von 20 Teilchen bestimmt, die im gleichen Radienintervall liegen — diese Teilchen entstammen dem Material, das für die Korrekturbestimmung in der Arbeit *Schedlings* zusammengetragen wurde.

Die experimentell bestimmte Korrektur als Mittelwert über 20 Teilchen ist für die vier Beobachter in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

| Beobachter: | E. | L. | Sch. | A. |
|--------------------------|------|------|------|------|
| δ in 10^{-5} cm | 0,98 | 1,00 | 0,90 | 0,78 |

⁵⁾ F. Ehrenhaft, Naturw. 23, 70, 1935.

Wendet man diese Korrekturen nun auf die Ausmessungsergebnisse der Mikrophotographien der niedergeschlagenen Teilchen an, so erhält man die auf rein optischem Wege bestimmten Radien der Probekörper. Andererseits kann man aus den gleichfalls gemessenen Fallgeschwindigkeiten der Probekörper nach dem *Stokes-Cunninghamschen* Gesetz die Radien berechnen. Die folgende Tab. 1 zeigt zunächst die optisch

Tabelle 1.

| Teilchen- nummer | Optisch korrigierte Radien $\cdot 10^5$ cm | | | | Theoret. Radius $\cdot 10^5$ cm |
|---------------------|--|-------|-------|-------|------------------------------------|
| | E. | L. | Sch. | A. | |
| 80 | 13,25 | 13,00 | 13,22 | 13,04 | 13,07 |
| 121 | 10,98 | 10,79 | 10,97 | 10,93 | 11,05 |
| 123 | 10,58 | 10,33 | 10,33 | 10,28 | 10,31 |
| 78 | 9,58 | 9,46 | 9,61 | 9,54 | 9,90 |
| 120 | 8,72 | 8,80 | 8,89 | 9,01 | 8,81 |
| 79 | 8,28 | 8,05 | 8,25 | 8,07 | 8,11 |
| 117 | 7,96 | 7,77 | 7,95 | 7,98 | 7,79 |
| 113 | 7,59 | 7,74 | 7,78 | 7,59 | 7,51 |
| 105 | 6,51 | 6,47 | 6,43 | 6,26 | 6,53 |
| 81 | 6,04 | 5,87 | 6,02 | 5,91 | 5,97 |
| 126 | 5,10 | 5,11 | 5,15 | 5,00 | 5,01 |
| 107 | 3,58 | 3,46 | 3,66 | 3,48 | 3,70 |
| 108 | 3,48 | 3,51 | 3,60 | 3,53 | 3,44 |
| 114 | 3,50 | 3,40 | 3,59 | 3,38 | 3,49 |
| 112 | 3,08 | 3,07 | 3,12 | 3,11 | 3,14 |

gewonnenen Radien und im Vergleich dazu die nach dem theoretischen Gesetz bestimmten, wobei für dieses ein $A = 0.8$ verwendet wurde.

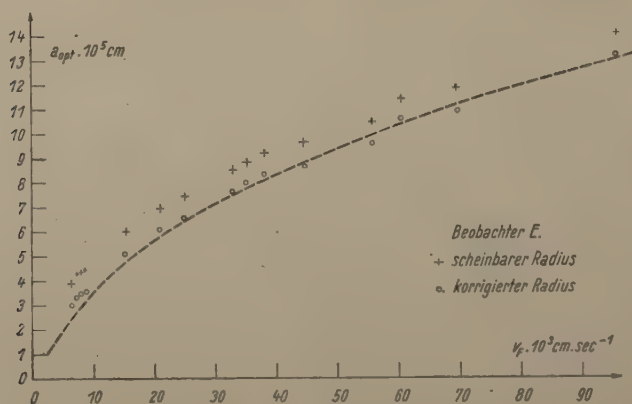


Abb. 1.

Abb. 1 und 2 zeigen für die beiden Beobachter E. und Sch. graphisch den Vergleich der korrigierten optischen Werte

mit den aus dem Widerstandsgesetz mit $A = 0,8$ gewonnenen Werten für die Radien. Wie man aus den Kurven sieht, stimmen die optischen Werte ziemlich gut mit der theoretischen Kurve überein.

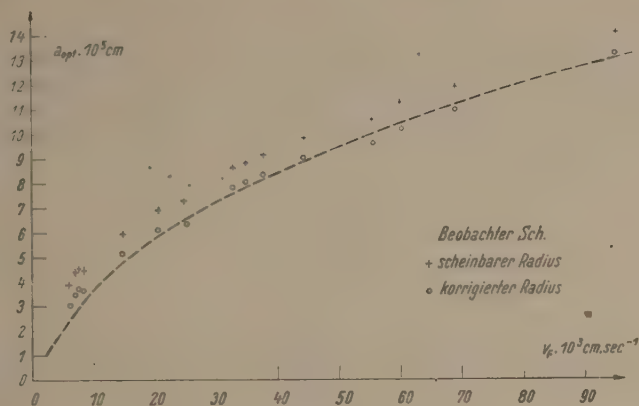


Abb. 2.

Nun kann man aus den optisch ermittelten Radien das Gewicht mg und unter Verwendung der Fallgeschwindigkeit

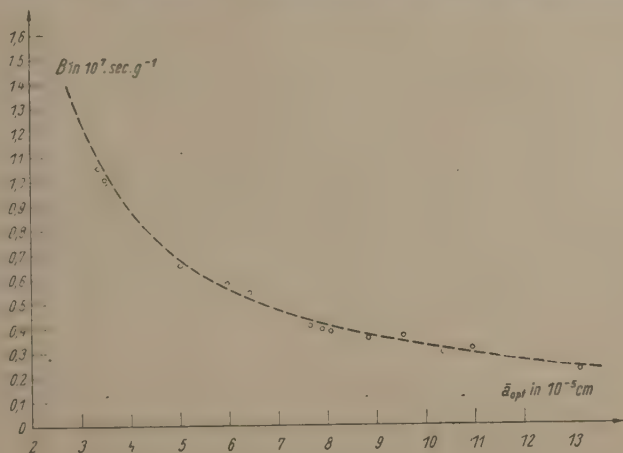


Abb. 3.

die Beweglichkeit B berechnen. In der Abb. 3 ist zunächst das theoretische Gesetz mit $A = 0,8$ eingetragen und sodann die Werte für B , die sich aus den optischen Radien ergeben, wenn man die Einzelwerte aller vier Beobachter mittelt.

Aus der Beweglichkeit B und den optisch gefundenen Radien kann unter Zugrundelegung des Widerstandsgesetzes nach der Formel

$$A = (6\pi\eta a B - 1) \frac{a}{l}$$

auch die Konstante A berechnet werden. Man erhält die aus der folgenden Tab. 2 ersichtlichen Werte für A . Sie zeigen, wie zu erwarten war, eine beträchtliche Schwankung, die im Intervall 1,58 bis 0,43 liegt. Eine arithmetische Mittelung ergibt

Tabelle 2.

| Teilchen- nummer | $a_{\text{opt}} \cdot 10^5 \text{ cm}$ Mittelwert | A |
|---------------------|--|------|
| 80 | 13,13 | 0,63 |
| 121 | 10,92 | 1,07 |
| 123 | 10,38 | 0,63 |
| 78 | 9,55 | 1,58 |
| 120 | 8,86 | 0,70 |
| 79 | 8,16 | 0,69 |
| 117 | 7,92 | 0,52 |
| 113 | 7,68 | 0,43 |
| 105 | 6,42 | 1,03 |
| 81 | 5,96 | 0,82 |
| 126 | 5,09 | 0,65 |
| 107 | 3,55 | 1,15 |
| 108 | 3,53 | 0,59 |
| 114 | 3,47 | 0,84 |
| 112 | 3,10 | 0,90 |

als Wert 0,82, eine solche Mittelung ist unberechtigt, da den einzelnen Werten von A keineswegs gleiches Gewicht zukommt.

Abschließend kann man jedoch sagen, daß durch die optischen Untersuchungen und ihre Resultate eine direkte experimentelle Bestätigung des *Stokes-Cunninghamschen* Gesetzes im untersuchten Radienintervall mit einer Konstanten A der Größenordnung 1 erbracht ist.

Zur Frage der Genauigkeit der Radiumstandardpräparate.

Von

Berta Kremenak, Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 12. Dezember 1947.)

Durch eine Veröffentlichung *Cf. Weiß*¹⁾ wurde die Frage der Genauigkeit der Radiumstandardpräparate erneut angeschnitten. *Weiß* hatte einen aktinometrischen Vergleich einiger Standardpräparate vorgenommen und glaubt aus seinen Meßergebnissen den Schluß ziehen zu können, daß die Definition der alten und neuen Normale zweifelhaft und erheblich schlechter erscheint, als der Wägegenauigkeit bei der Herstellung entspricht.

St. Meyer nahm in einer Veröffentlichung²⁾ zur Arbeit *Cf. Weiß*' und vor allem zu seiner Meßanordnung Stellung.

Die Aufgabe vorliegender Arbeit war es, durch *experimentelle* Untersuchungen zur Klärung der Frage beizutragen.

1. Überprüfung der Werte der Wiener Standards.

Zunächst wurden alle im Institut für Radiumforschung in Wien befindlichen Radiumstandardpräparate miteinander verglichen. Zu diesen Vergleichen wurden Instrumente herangezogen, die seit Jahren im hiesigen Institut zu γ -Strahlungsmessungen Verwendung finden.

Beschreibung der Instrumente.

1. Großer Curiescher Plattenkondensator.

Die allgemeine Ausführungsform des Instrumentes wurde erstmalig beschrieben bei *M. Curie*³⁾ und *St. Meyer*⁴⁾. Der Kon-

1) Ztschr. f. Phys. **120**, 652, 1943.

2) Mitt. d. Inst. f. Radiumforschung Nr. 452a, 1945.

3) J. de phys. (5) **2**, 795, 1912.

4) Strahlentherapie **2**, 536, 1912.

densator wurde im Jahre 1912 zur Eichung der sekundären Standards verwendet.

Die Ionisationskammer wird durch einen Zylinder von 4 cm Höhe und 32 cm Durchmesser gebildet, der zugleich die geerdete Außenelektrode darstellt. Mantel- und Grundfläche des Zylinders bestehen aus 1 mm starkem Messing, die Deckfläche aus einer 2 mm starken, abnehmbaren Zinkplatte (Abänderungen des Elektrodenmaterials werden besonders angeführt). Die zweite Elektrode ist eine 1 mm starke Zinkplatte, die sich im Innern des Zylinders 1 cm über der Grundfläche befindet und isoliert mit dem Quarzfadensystem eines Zweifadenelektrometers verbunden ist. Über die Deckfläche des Zylinders werden, der Stärke der zu messenden Präparate angepaßt, Bleiplatten verschiedener Dicke gelegt. Die Präparate werden zur Messung ihrer Strahlungswirkung ohne Schutzhülle im einfachen Glasröhrchen auf die Mitte der Bleiplatten gelegt. Der Vorteil des direkten Aufliegens der Präparate besteht darin, daß streifend eintretende Strahlen, die gegen den inhomogenen Teil des Feldes gerichtet sind, wegen des wesentlich längeren Weges im Blei praktisch wirkungslos bleiben; außerdem wird die Sekundärstrahlung aus der Umgebung stark vermindert.

2. Das Wulfsche γ -Strahl-Elektrometer.

(Erstmalig beschrieben bei V. F. Heß⁵⁾, im folgenden kurz „Apparat nach Heß-Wulf“ genannt.)

Bei diesem Instrument stellt das entsprechend vergrößerte Elektrometergehäuse selbst den Ionisationsraum und das Quarzfadensystem die Innenelektrode dar, wodurch die Kapazität der Anordnung besonders klein gehalten wird. Zur Ablesung der Spreizung der Quarzfäden wird durch die Kammerwandung der Tubus eines Mikroskops geführt. Die Ionisationskammer ist ein vertikaler Zylinder von 11,5 cm Höhe und 13,5 cm Durchmesser aus Messingblech, allseitig umgeben von einer 5 mm starken, dicht anliegenden Bleiwand. Die Präparate werden in genau bestimmten Entfernungen vom Instrument (1—1,5 m) so aufgestellt, daß sie ungefähr in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkt des Zylinders zu liegen kommen.

3. Apparat nach Wulf zur Messung der durchdringenden Strahlung (Wulfscher Strahlungsapparat).

Dieses Instrument stellt eine ältere Ausführungsform des Apparats nach Heß-Wulf dar und unterscheidet sich von obigem nur durch die *liegende* Anordnung der zylindrischen Ionisations-

⁵⁾ Phys. Ztschr. **XIV**, 1135, 1913.

kammer. Dadurch herrschen bei diesem Apparat viel ungünstigere Feldverhältnisse als bei den beiden anderen Instrumenten.

(Länge des Zylinders = 18 cm, Durchmesser = 15,5 cm.)

Angaben über die zur Messung herangezogenen
Wiener Standards.⁶⁾

Die primären Standards:

Präparat I: hergestellt 1911,
eingewogene Substanzmenge = 10,11 mg RaCl_2
= 7,69 mg Ra El.
Gehalt berechnet für 1947 = 7,57₆ mg Ra

Präparat II: hergestellt 1934,
eingewogene Substanzmenge = 30,75 mg RaCl_2
= 23,40₇ mg Ra
relationiert auf alten inter-
nationalen Ersatzstandard = 23,44 mg Ra
Gehalt berechnet für 1947 = 23,27₅ mg Ra
(eingewogen)
= 23,30₈ mg Ra
(relationiert)

Präparat III: hergestellt 1911,
eingewogene Substanzmenge = 40,43 mg RaCl_2
= 30,77₅ mg Ra
Gehalt berechnet für 1947 = 30,29₆ mg Ra

Die sekundären Standards:

sämtlich hergestellt 1911,

Gehalt berechnet für 1947: Präp. 1 = 1,116 mg Ra Element
Präp. 2 = 2,164 mg "
Präp. 3 = 3,653 mg "
Präp. 4 = 8,518 mg "
Präp. 5 = 16,453 mg "

Die Substanzmengen der primären und sekundären Standards sind durchwegs in gleichdimensionierte Glasröhrchen eingeschmolzen, so daß bei Vergleichsmessungen die Absorption der Strahlung in der Glashülle unberücksichtigt bleiben kann. Auch die Eigenabsorption der Strahlung im Salz mußte nicht in Rechnung gesetzt werden, da immer Präparate annähernd gleicher Substanzmengen verglichen wurden.

⁶⁾ Primäre Standards werden mit römischen Ziffern bezeichnet, sekundäre mit arabischen.

Einzelheiten des Meßvorganges.

Bei allen drei Instrumenten wurde das Zeitintervall gemessen, innerhalb dessen an der Innenelektrode ein bestimmter Potentialrückgang eintrat.

Das Wandern des Fadens von Skalenteil 70 auf Skalenteil 50 bedeutet beim Plattenkondensator eine Potentialänderung von 186 auf 142,5 Volt ($= 43,5$ Volt), beim Apparat nach *Heß-Wulf* eine von 260 auf 187,5 Volt ($= 72,5$ Volt) und beim *Wulfschen* Apparat von 238 auf 164,5 Volt ($= 73,5$ Volt). Aus der Potentialänderung an der Innenelektrode und der nach *Harms* bestimmten Kapazität der Instrumente wurde berechnet, daß bei 100 Sekunden Laufzeit des Fadens über den oben erwähnten Skalenbereich Ionenströme in der Größenordnung von $5 \cdot 10^{-11}$ Ampere im Plattenkondensator und von etwa 10^{-12} Ampere in den beiden anderen Instrumenten fließen.

Für jedes Präparat wurden zwischen zwei Leereffektmessungen 15 bis 20 Einzelablesungen vorgenommen. Diese Messungen wurden für zwei Präparate, deren Strahlungsintensitäten verglichen werden sollten, unmittelbar hintereinander ausgeführt.

Eine Reihe von Einzelmessungen zweier Präparate, wie sie hier angeführt wurde, soll als „Meßserie“ bezeichnet werden. Für jede „Präparatkombination“ (so wollen wir im folgenden zwei zum Vergleich ausgewählte Präparate bezeichnen) wurden durchschnittlich 10 bis 15 Meßserien mit jedem der drei genannten Instrumente durchgemessen. Erst der Mittelwert aus den Resultaten dieser Meßserien gibt die Zahl, die in der folgenden Zusammenstellung als Ergebnis des experimentellen Vergleiches eingesetzt ist.

Die nach *Gauß* berechnete Fehlergrenze dieser Endergebnisse beträgt 0,15 bis 0,20 %. Damit wurde allerdings noch lange nicht die Genauigkeit erreicht, die *Cf. Weiß* für seine Meßresultate angibt. (Die Messungen in Berlin hatten im Durchschnitt eine Meßfehlergrenze von 0,050 %.) Die vorliegenden Messungen hatten aber den Zweck, zu untersuchen, ob die Wiener Standards tatsächlich die Genauigkeit beanspruchen können, die von der Standardkommission verbürgt wurde (0,20 % für primäre Normale und 0,50 % für sekundäre), oder ob sich Abweichungen in der Größe ergeben, wie sie *Cf. Weiß* fand. Um dies festzustellen waren die vorliegenden Messungen hinreichend genau.

Nach den gewonnenen Erfahrungen scheint es wichtig, darauf hinzuweisen, daß der größte Teil der Messungen unter außergewöhnlich günstigen Witterungsverhältnissen durchgeführt werden konnte (Frühjahr und Sommer 1947), d. h. keine großen Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen zu verzeichnen waren, unter welchen bekanntlich die Isolation der Instrumente leidet.

Außerdem beeinflußt nasses und kaltes Wetter statische Ionisationsmessungen dadurch ungünstig, daß sich große Schwankungen in den Werten für die natürliche Zerstreuung ergeben.

Resultate der ausgeführten Messungen.

A. Präparat 3 gegen Präparate (1 + 2):

erwarteter Verhältniswert 3 (1 + 2) = 1,114

Verhältniswert gef. mit *Plattenkondens.* = 1,112

„ „ „ *App. n. Heß-Wulf* = 1,112

„ „ „ *Wulfsch. Str.-App.* = 1,112

Abweichung des experimentell bestimmten Verhältniswertes gegen den erwarteten Wert: 0,18%.

B. Präparat 5 gegen Präparat 4:

erwarteter Verhältniswert 5/4 = 1,932

Verhältniswert gef. mit *Plattenkondens.* = 1,918

„ „ „ *App. n. Heß-Wulf* = 1,919

„ „ „ *Wulfsch. Str.-App.* = 1,918

Abweichung des experimentell bestimmten Verhältniswertes gegen den erwarteten Wert: 0,74%!!⁷⁾

Um eine Erklärung für die durch Mittelwertbildung aus 58 Meßserien gewährleistete Abweichung zu finden, wurden beide Präparate gemeinsam gegen den primären Standard II gemessen.

C. Präparate (5 + 4) gegen Präparat II:

erwarteter Verhältniswert (5 + 4) II = 1,073
(eingewogen)

= 1,703

(relationiert auf II alt)

Verhältniswert gef. mit *Plattenkondens.* = 1,073

„ „ „ *App. n. Heß-Wulf* = 1,073

„ „ „ *Wulfsch. Str.-App.* = 1,074

Abweichung des experimentell bestimmten Verhältniswertes gegen den definierten Wert: 0,1%.

Bei dieser vorzüglichen Übereinstimmung erschien die Abweichung bei der Kombination 5 gegen 4 besonders bemerkens-

⁷⁾ Wie eine Einsicht in alte Protokolle zeigte, wurde nie zuvor ein aktinometrischer Vergleich von Präparat 5 gegen Präparat 4 durchgeführt, woraus sich erklärt, weshalb die eben erwähnte Abweichung nicht schon früher festgestellt wurde.

wert. Die Frage nach einer Erklärung ließ folgende Überlegung aufkommen:

Es wäre möglich, daß bei der Definition der Standards der Wert des Präparates 4 etwas zu klein, der des Präparates 5 dagegen zu groß angegeben wurde. Die Abweichungen könnten durchaus innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen liegen, bei einem Vergleich 5 gegen 4 durch ihr verschiedenes Vorzeichen den Verhältniswert aber deutlich verschieben. Bei der Kombination (4 + 5) gegen II heben sich die Abweichungen dagegen auf. Um zu prüfen, ob eine solche Erklärung zulässig sei, wurden die Präparate 4 und 5 einzeln an den primären Standard I neu angeschlossen.

D. Präparat 4 gegen Präparat I

erwarteter Verhältniswert 4/I = 1,124

Verhältniswert gef. mit *Plattenkondens.* = 1,128

Abweichung des experimentell bestimmten Verhältniswertes gegen den erwarteten Wert: 0,36%.

Da sich bisher nur geringe Abweichungen in den Meßresultaten der drei Instrumente ergeben hatten, schien es überflüssig, die zeitraubenden Messungen wieder auf allen drei Instrumenten durchzuführen. Es liegt kein Grund vor, an der Richtigkeit des Ergebnisses, das mit dem Plattenkondensator gefunden wurde, zu zweifeln. Da sich der Wert 1,128 als Mittelwert aus den Resultaten einer Anzahl von Serien ergibt und die Meßwerte der einzelnen Serien durchwegs *über* dem Wert 1,124 liegen, so ist 1,128 als der wahrscheinlichere Wert anzusehen. Dann ist aber die Angabe für den Radiumgehalt des Präparates zu korrigieren, und zwar ist zu setzen:

Präparat 4: anstatt Gehalt für 1947 = 8,518 mg Ra
Neubestimmung „ 1947 = 8,546 mg Ra

E. Präparat 5 gegen Präparat I

erwarteter Verhältniswert 5/I = 2,172

Verhältniswert gef. mit *Plattenkondens.* = 2,169

Abweichung des experimentell bestimmten Verhältniswertes gegen den erwarteten Wert: 0,15%.

Man könnte für diese Bestimmung dieselben Überlegungen wie oben anstellen und den Wert 2,169 als den wahrscheinlicheren ansehen, doch liegt die Abweichung innerhalb der Meßfehlergrenzen. Es gälte dann:

Präparat 5: anstatt Gehalt für 1947 = 16,453 mg Ra
Neubestimmung „ 1947 = 16,432 mg Ra

Legt man die unter D. und E. angeführten neuen Werte für Präparat 4 und 5 zugrunde, so errechnet sich ihr Verhältniswert zu 1,922 (Wert nach der alten Definition 1,932). Dem stehen die experimentell gefundenen Werte mit 1,918, 1,919 und 1,918 (s. o.) gegenüber. Der Verhältniswert der Kombination $(4 + 5)/II$ bleibt auch nach der Neubestimmung der Präparate 4 und 5 gleich 1,072.

F. Präparat 3 gegen Präparat 2

erwarteter Verhältniswert $3/2$ = 1,689

Verhältniswert gef. mit *App. n. Heß-Wulf* = 1,689

G. Präparat III gegen Präparat II

erwarteter Verhältniswert III/II = 1,3014
(eingewogen)
= 1,3000
(relationiert
auf II alt)

Verhältniswert gef. mit *Plattenkondens.* = 1,300

Zusammenfassung der Resultate der Punkte A. bis G.

Sämtliche im Wiener Institut für Radiumforschung befindlichen primären und sekundären Standards gelangten zur neuerlichen Messung. Die hiebei experimentell bestimmten Verhältniswerte stimmten mit den Definitionswerten ausgezeichnet überein, d. h. die Abweichungen zwischen diesen beiden Werten betrugen höchstens 0,1 bis 0,2% (mit Ausnahme von Präparat 4, s. u.).

Bemerkenswert ist, daß sich diese vorzügliche Übereinstimmung sowohl bei Vergleichen der sekundären Standards untereinander ergab, als auch bei Vergleichen der sekundären Standards mit den alten Primär-Standards von 1911 und vor allem bei Vergleichen des neuen primären Standards (II) von 1934 mit den alten primären Standards und mit den sekundären Normalen.

Die einzige größere Unstimmigkeit zeigte sich bei der Messung der Präparate 5 gegen 4 und konnte aufgeklärt werden. Die Resultate der sorgfältigst ausgeführten Messungen zeigen deutlich, daß jeder Zweifel an der Genauigkeit der Definitions-werte für primäre und sekundäre Standards unberechtigt ist.

Auch nach den neuen Messungen gilt die Definition der Wiener Standards innerhalb einer Toleranz von $\pm 0,2\%$ für primäre und $\pm 0,5\%$ für sekundäre Normale.

II. Versuche zur Erklärung für die von Cf. Weiß festgestellten Abweichungen.

Den Meßergebnissen der P. T. R. stehen, abgesehen von den Vergleichen zwischen den Präparaten 5426, 5431, 5435 und 5442, für die keine Resultate von anderer Seite vorliegen, folgende Meßergebnisse gegenüber:

a) *Messungen, ausgeführt von der Internationalen Standardkommission, Paris 1911.* Übereinstimmung der Intensität der Strahlungen mit den Werten für die eingewogenen Substanzmengen im Rahmen einer Meßgenauigkeit von $0,2^0_0$ für die beiden Urnormale und zwei weitere Präparate von *O. Hönigschmid* (derzeit in Wien und als Präparat III und I bezeichnet).

b) *Offizielle Eichungen an den sekundären Standards.* Eine Rechtfertigung der Werte für die beiden Urnormale durch die Eichung der sekundären Standards wurde von *St. Meyer* in der Veröffentlichung klar herausgestellt, in der er zur Arbeit *Cf. Weiß'* Stellung nimmt (Mitt. d. Inst. f. Radschg. Nr. 452a, 1945).

Bei 15 sekundären Radiumnormalen, die unabhängig voneinander anhand des Pariser und des Wiener Urnormals geeicht wurden, unterschied sich die Pariser von der Wiener Messung um durchschnittlich nur $0,2^0_0$. Diese Resultate entkräften den Einwand *Cf. Weiß'*, daß die Messungen nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit durchgeführt wurden, weil der Kommission nicht viel Zeit zum Vergleich der Urnormale zur Verfügung gestanden sei. Die Eichung jedes einzelnen dieser sekundären Standards rechtfertigt durch die Übereinstimmung der Pariser mit den Wiener Meßergebnissen die Genauigkeit der Definitionswerte der Urnormale. Dabei muß hervorgehoben werden, daß in Paris und in Wien voneinander völlig verschiedene Eichapparaturen in Verwendung standen.

c) Der in einer Veröffentlichung von *St. Meyer* (Mitt. d. Inst. f. Radschg. Nr. 411a, 1938) erwähnte *Anschluß zweier neuer primärer Standards für Washington an das Pariser und das Wiener Urnormal.*

Der in Wien erzielte Wert war für beide Präparate um $0,1^0_0$ höher als der in Paris gefundene.

d) *Die in vorliegender Arbeit angeführten Vergleiche zwischen primären und sekundären Standards.* Obige Gegenüberstellung legt es nahe, in den Versuchsbedingungen *Cf. Weiß'* einen systematischen Fehler zu vermuten, da eine Veränderung der Präparate seit ihrer Herstellung außerordentlich unwahrscheinlich erscheint. Da es schwierig ist, Mängel an einer Versuchsanordnung aufzudecken, deren Aufbau aus einer kurzen

Beschreibung nur unzulänglich bekannt ist⁸⁾, mußten wir uns darauf beschränken, allgemeine Untersuchungen über die Beeinflussung von Relativmessungen der Ionisationswirkung anzustellen.

Es wurde nach folgenden Gesichtspunkten untersucht:

1. Sättigungsstrom in zylindrischen Ionisationskammern.

Die Form eines Zylinders erscheint im allgemeinen für eine Ionisationskammer nicht sehr günstig, wenn sich das Präparat einer Stirnfläche des Zylinders gegenüber befindet. Wie eingangs erwähnt, ist es zur Erzielung des Sättigungsstromes notwendig, mit einem möglichst homogenen und starken Feld zu arbeiten. In einer zylindrischen Kammer wird das Feld in der Nähe der Kanten immer schwächer sein als in den anderen Teilen, welche Form die Innenelektrode auch haben mag. Gerade in diesem Bereich aber wird eine starke Ionisationswirkung eintreten, wenn die Strahlung durch die Stirnfläche in den Zylinder dringt.

Es wurde experimentell genau untersucht, welchen Grad von Sättigung die Ionisationsströme erreichen, sowohl bei Eintritt der Strahlung durch die Mantelfläche als auch durch die Stirnfläche des Zylinders.

Diese Messungen wurden mit einer zylindrischen Kammer ausgeführt (Höhe 17 cm, Durchmesser 10,5 cm), deren stabförmige Innenelektrode mit dem Faden eines Einfadenelektrometers in Verbindung stand. An die Kammer wurde Spannung gelegt und jenes Zeitintervall gemessen, innerhalb dessen sich die Innenelektrode auf ein bestimmtes Potential auflädt (Auflademethode).

Folgende Versuchsbedingungen wurden variiert:

- a) die Kammerspannung,
- b) die Stellung der Präparate (gegenüber der Mantelfläche oder der Stirnfläche des Zylinders),
- c) Präparatstärke durch Verwenden verschiedener Präparate.

Aus der Potentialänderung an der Innenelektrode und der nach Harms bestimmten Kapazität der Anordnung wurden die Ströme berechnet, die jeweils zur Messung gelangten. Für Ströme von 10^{-12} Ampere war bei 200 Volt Kammerspannung schon Sättigung erreicht.

Für dieselben Ströme betrug der Sättigungsgrad bei 110 Volt Kammerspannung 98,8% bei Eintritt der Strahlung durch die

⁸⁾ Es liegen keine Angaben über die Empfindlichkeit des Elektrometers und über die angelegte Spannung vor.

Mantelfläche des Zylinders, $97,9^{\circ}_0$ bei Eintritt der Strahlung durch die Stirnfläche des Zylinders. Der Unterschied im Sättigungsgrad ist bei 110 Volt Spannung noch nicht sehr groß (1°_0), aber unzweifelhaft vorhanden. Die angegebenen Werte stellen Mittelwerte aus den Resultaten einer Anzahl von Messungen dar, die alle eindeutig obigen Unterschied aufzeigen.

Ob bei den Messungen *Cf. Weiß'* ein Sättigungsdefizit vorlag, ist nicht zu entscheiden, da eine Angabe der Spannung, bei der gearbeitet wurde, in seiner Veröffentlichung fehlt.

Folgende Überlegung scheint die Frage nach dem Sättigungszustand allerdings zu beantworten:

Wäre tatsächlich mangelnde Sättigung der Grund dafür, daß *Weiß* abweichende Meßresultate erhielt, so müßte diese Abweichung nur in *eine* Richtung fallen. Die Verhältniswerte starkes Präparat, schwaches Präparat müßten sämtlich zu klein ausfallen, da die Ionenverluste durch ein zu schwaches Feld bei den stärkeren Präparaten jedenfalls größer sind. Die beobachteten Streuungen fielen jedoch nach beiden Seiten.

2. Einfluß der Art der Aufbewahrung der Präparate auf die Meßresultate.

Da bei den verwendeten Methoden die harte γ -Strahlung der aktiven Substanz zur Messung gelangt, d. h. nur die Strahlung des im Gleichgewicht mit Radium befindlichen RaC gemessen wird, ist es auch beachtenswert, wo sich der aktive Niederschlag der Radiumemanation anlagert. Werden die Präparate stehend aufbewahrt, so befindet sich die gesamte Substanzmenge im untersten Teil des vertikalen Glasröhrchens, liegen hingegen die Präparate, so ist die Substanz über die Längsseite des Röhrchens aufgeschüttet. In jedem der beiden Fälle wird sich der aktive Niederschlag an anderen Stellen ablagern. Am Wiener Institut werden die Präparate stets stehend aufbewahrt; die Glasröhrchen stecken nebeneinander in einer Stahlbüchse. Am Apparat nach *Heß-Wulf* und dem nach *Wulf* werden sie auch stehend gemessen, bei der Messung an der Curie-Anordnung liegen die Präparate auf den Bleiplatten.

Bei den Messungen an der Curie-Anordnung zeigten sich sehr kleine, aber immer wiederkehrende Unterschiede zwischen den Laufzeiten, die gemessen wurden, gleich nachdem die Präparate aus der Stahlbüchse genommen und auf den Plattenkondensator gelegt wurden, und jenen, die einige Zeit nachher abgestoppt wurden. Für exakte Bestimmungen mit dieser Apparatur mußten daher die Präparate schon einige Stunden vor der Messung in liegende Stellung gebracht und sorgfältig darauf geachtet werden, daß beim Auflegen der Röhrchen auf die Bleiplatten keine Umlagerung der Substanzmengen mehr möglich war.

Es wurde nun untersucht, ob sich durch die verschiedene Ablagerung des aktiven Niederschlages der Verhältniswert zweier Präparate verschieben kann, wenn eines längere Zeit *liegend*, das andere *stehend* aufbewahrt wurde. Diese Messungen wurden für die Kombination III/II mit der Curie-Anordnung und für (1 + 2) 3 mit dem Apparat nach *Heß-Wulf* ausgeführt. Wie oben erwähnt, unterschieden sich die ersten Ablesungen nach liegender Aufbewahrung der Präparate um einen kleinen Betrag von den später erfolgten, jedoch ging die Umlagerung des aktiven Niederschlages so rasch vor sich, daß die Mittelwerte über eine Reihe von Einzelablesungen keine Abweichungen gegen die Sollwerte zeigten, die über die zulässige Fehlergrenze hinausgehen.

3. Variation des Elektrodenmaterials beim Plattenkondensator.

Die 2 mm starke Zinkplatte, welche die Deckfläche der Ionisationskammer bildet, wurde durch eine 4 mm starke, mit Aluminiumfolie überzogene Glasplatte ersetzt und bei einer zusätzlichen Bleiaufgabe von 20 mm Präparat 5 gegen Präparat 4 gemessen. Der Mittelwert der Meßresultate, die innerhalb der angegebenen Fehlergrenze lagen, ergab für das Strahlenverhältnis der beiden Präparate den Wert 1,918 gleich dem mit der Zinkplatte erzielten Ergebnis (s. o.).

4. Einfluß eines Streukörpers auf Ionisationsmessungen.

Eine 0,5 mm starke Eisenblechwand (1,44 mal 1,80 Meter) wurde in genau bestimmten Entfernungen vom Apparat nach *Heß-Wulf* aufgestellt (laut Abb. 1—3) und die Ionisations-

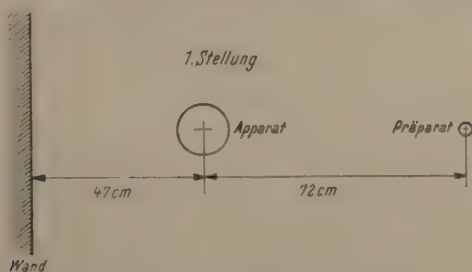


Abb. 1.

wirkung zweier Präparate in beschriebener Weise gemessen (wobei jedes der beiden Präparate mit Reflektorwand gemessen wurde.)

Die Messungen wurden mit und ohne Bleimantel für das Instrument ausgeführt. Eine große Zahl vorzüglich überein-

stimmender Meßresultate erweist, daß sich der Verhältniswert zweier Präparate durch Einfluß eines Reflektors nicht verschiebt.

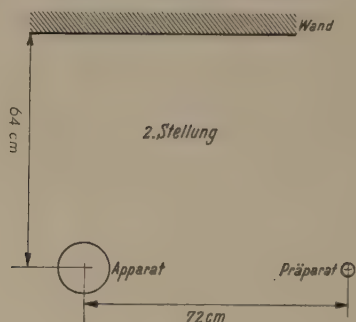


Abb. 2.

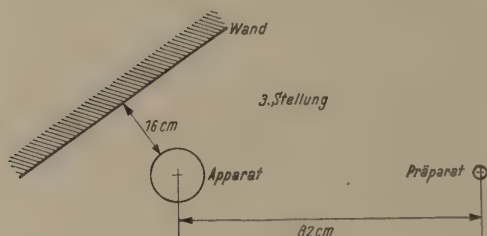


Abb. 3.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß es nicht gelungen ist, durch Variation der Versuchsbedingungen bei Messungen nach der Methode des γ -Strahl-Vergleiches eine Änderung des Verhältniswertes zweier Präparate festzustellen.

Schlußbemerkungen.

Die beiden jüngsten Veröffentlichungen „Über die Radium-standardpräparate“ stammen aus dem Jahre 1945 und wurden verfaßt von *St. Meyer* (Mitt. d. Inst. f. Radrsg. Nr. 452a, 1945) und *O. Hönigschmid* (Mitt. d. Inst. f. Radrsg. Nr. 453a, 1945).

Wie aus der Veröffentlichung *O. Hönigschmid*s hervorgeht, können aus wägetechnischen Gründen derzeit für gewichtsmäßig hergestellte Standards Unsicherheiten bis auf $0,2^{0,0}$ als zulässig gelten. Innerhalb dieser Fehlergrenze sind aber die Werte für primäre Standards als völlig gesichert anzusehen, wie die Vergleiche der Strahlungswirkungen der Präparate gezeigt haben. Da aktinometrische Messungen weit präziser ausgeführt werden können als die gewichtsmäßige Herstellung der Standards er-

folgen kann, ergibt sich die Tatsache, daß die Genauigkeit, mit der die Messungen ausgeführt werden können, jene, mit der das Normal definiert ist, weit übertrifft. Man wird also bei aktinometrischen Messungen in der Regel nicht versuchen, mit der Meßgenauigkeit weit unter die Fehlergrenze zu kommen, die für die Standards gegeben ist, es sei denn, es handelt sich um Relativmessungen, für die alle Angaben auf *ein* Präparat relationiert werden.

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß *O. Hönigsmid* die Größe des möglichen Wägefehlers mit $0,04\text{ mg}$ angibt, während *Cf. Weiß* für die *Hönigsmidschen* Messungen eine Genauigkeit von $0,01\text{ mg}$ annimmt. Dadurch gilt z. B. der neue Berliner Primär-Standard ($19,19\text{ mg RaCl}_2$) nicht innerhalb einer Wägefehlergrenze von $0,05\text{ ‰}$, sondern von nur $0,2\text{ ‰}$ genau definiert. Bei der Bildung des Verhältniswertes zweier Präparate ist zu beachten, daß sich die Toleranzen addieren, wodurch die Abweichung zwischen dem Verhältniswert der Strahlungen und dem der eingewogenen Substanzmengen bis zu $0,4\text{ ‰}$ betragen kann.

St. Meyer diskutiert in seiner Veröffentlichung die Möglichkeit, bei der Definition der Radiumeinheit auf die Gewichtsmenge als primäre Angabe überhaupt zu verzichten und sie aus bestimmten, genau meßbaren Wirkungen, beispielsweise aus der Zahl der pro Sekunde emittierten α -Teilchen, herzuleiten.

Zusammenfassung.

Auf Grund aktinometrischer Vergleiche, die mit den Wiener Standardpräparaten ausgeführt wurden, wird gezeigt, daß die Einwände gegen die Verlässlichkeit der Radiumstandardpräparate, die *Cf. Weiß* 1943 veröffentlichte, nicht stichhältig sind.

Dynamische Elektronenströmung unter dem Einfluß dynamischer Felder.

Von

H. W. König, Wien.

Mit 5 Abbildungen.

(Eingelangt am 8. Jänner 1948.)

I. Problemstellung.

In den üblichen Verstärkerröhren vollzieht sich die Bewegung der Elektronen unter dem Einfluß der Wechselfelder nach quasistationären Gesetzmäßigkeiten. Die Aufenthaltsdauer eines Elektrons zwischen den Elektroden macht nur einen verschwindend kleinen Bruchteil einer Periode aus. Jedes Elektron bewegt sich daher in einem zeitlich nahezu konstanten elektrischen Kraftfeld; der Bewegungsvorgang kann als stationär betrachtet werden (quasistationäre Elektronenströmung). Außerdem ist die Laufzeit des Feldes klein gegenüber der Periodendauer, das Feld ist daher ebenfalls quasistationär. Bei technisch herstellbaren Elektrodenabständen und erträglichen Gleichspannungen liegen diese einfachen Verhältnisse vor, solange die Frequenz 10^9 Hz, das entspricht einer Wellenlänge von etwa 30 cm, nicht wesentlich überschreitet.

Bei cm-Wellen lassen sich quasistationäre Strömungsverhältnisse der Elektronen infolge der verhältnismäßig geringen Geschwindigkeiten nicht mehr herstellen. Die Laufzeit liegt in der Größenordnung einer Periode, der Laufwinkel in der Größenordnung von 2π . Eine solche Strömung wollen wir — in Anlehnung an die Begriffsbildung beim elektromagnetischen Feld — als eine dynamische bezeichnen. Wegen der Kleinheit der Elektronengeschwindigkeit gegenüber der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes, tritt der dynamische Charakter der Strömung bei erheblich niedrigeren Frequenzen zutage als der des Feldes. In dem sogenannten Klystron hat man im allgemeinen eine dynamische Strömung, aber im Steuerraum und Arbeitsraum noch quasistationäre Feldverhältnisse.

Die Anordnungen mit quasistationärem Feld und dynamischer Strömung haben sich bei der Erzeugung von cm-Wellen auch

großer Leistungen bestens bewährt, sie haben aber bis heute noch nicht die Erwartungen erfüllt, die man in sie als Vorverstärkerröhre gesetzt hatte. Hierbei kommt es nämlich darauf an, ein möglichst schwaches Eingangssignal nicht nur ausreichend zu verstärken, sondern damit gleichzeitig am Ausgang einen genügend großen Störabstand von dem durch den Schrotteffekt hervorgerufenen Rauschen zu erzielen, damit das verstärkte Signal nicht in dem Störgeräusch untergeht. In diesem Sinne ist ein Verstärker umso empfindlicher, je kleiner die Eingangsleistung einer bestimmten Frequenz ist, die am Ausgang dieselbe Nutzleistung ergibt, die durch das Rauschen dort hervorgerufen wird. Als Maß für die sogenannte Grenzemfindlichkeit hat man daher diejenige Leistung pro Hertz Bandbreite definiert, welche am Eingang aufzuwenden ist, um am Ausgang Nutzleistung = Störleistung zu erhalten. Die Grenzemfindlichkeit hat demnach die Dimension einer Energie und wird angegeben in Vielfachen von kT (k = Boltzmannkonstante, T = abs. Temperatur). Die gewöhnlichen Verstärkerröhren haben im Rundfunkgebiet eine Grenzemfindlichkeit unter $10 kT$, eine Verstärkerröhre nach Art des Klystrons bei einer Wellenlänge von 10 cm dagegen eine Grenzemfindlichkeit, die um etwa zwei Größenordnungen höher liegt.

Es liegt nun der Gedanke nahe, günstigere Verhältnisse dadurch herbeizuführen, daß man bei dynamischer Strömung von dem quasistationären Feld abgeht und ein dynamisches Feld benutzt, das sich annähernd mit Elektronengeschwindigkeit bewegt. Denn in diesem Falle läuft ein Elektron, ähnlich wie beim quasistationärem Feld und quasistationärer Strömung, in einem zeitlich nahezu konstanten Kraftfeld. Es steht also zu erwarten, daß sich eine dynamische Strömung in einem dynamischen Feld von gleicher oder annähernd gleicher Geschwindigkeit ganz ähnlich verhalten wird wie eine quasistationäre Strömung im quasistationären Feld.

Die in der vorliegenden Arbeit gebrachten Gedankengänge wurden vom Verfasser vor einigen Jahren untersucht, aber zunächst nicht weiter verfolgt, da sich kein geeignetes Verfahren zur Herabsetzung der Feldgeschwindigkeit bot. Unterdessen haben englische und amerikanische Forscher denselben Gedanken in der „Wanderwellen-Röhre“ (Traveling-Wave Tube) durch ein sinnreiches Verfahren in die Tat umgesetzt, indem sie die Phasengeschwindigkeit des Steuerfeldes durch Anwendung eines schraubenförmig gewundenen Drahtes, der in der Achse eines Hohlleiters ausgespannt ist, bis auf die Geschwindigkeit der Elektronen herabsetzten ([1], [2], [3], [4], [5]).

Die folgenden Untersuchungen beschränken sich zunächst auf die Relativgeschwindigkeit Null zwischen Feld und Elektronen. Eine Erweiterung dieser Gedankengänge in Richtung

beliebiger Relativgeschwindigkeiten wird in einer von *R. Wiesner* stammenden Arbeit erfolgen. In beiden Untersuchungen wird die Wirkung der Raumladung voll berücksichtigt.

II. *n*-Kreissystem mit phasenverschobenen Steuerkreisen.

Abb. 1 zeigt schematisch eine Elektronenströmung, die in dem mittleren Teil einem Wechselfeld ausgesetzt ist (Steuerstrecke). Die Gleichstromdichte sei J_0 , der Scheitelwert des

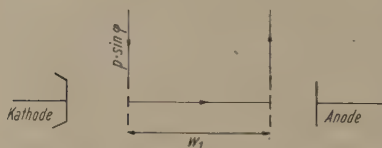


Abb. 1. Einkreis-Steuerstrecke.

über die Steuerstrecke geleiteten Wechselstromes (Stromdichte¹⁾) sei J_h . Die Elektronen treten mit der Geschwindigkeit v_0 in den Steuerraum ein. Zur Beschreibung des Feld- und Geschwindigkeitsverlaufes benutzen wir dimensionslose Größen, die sich

aus der Zeit t , dem von der Elektroneneintrittsstelle aus gezählten Abstand x , der elektrischen Feldstärke E und der Geschwindigkeit v wie folgt zusammensetzen:

$$\left. \begin{aligned} \omega t &= \varphi \\ \omega x &= z \\ v_0 \\ K E &= F \\ v_0 \omega \\ v &= u. \\ v_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ferner setzen wir für die Stromaussteuerung

$$\frac{J_h}{J_0} = p \quad (2)$$

und für das Aggregat

$$\frac{\epsilon_0 v_0 \omega^2}{K J_0} = q_0. \quad (3)$$

Hierin bedeuten ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante, K die spezifische Ladung der Elektronen und ω die Kreisfrequenz. Nach den Ergebnissen einer Arbeit [6] des Verfassers gelten dann für die reduzierte Feldstärke F und für die reduzierte Geschwindigkeit u die beiden Gleichungen:

¹⁾ Die Stromdichte ist auf die Einheit des dem Feld unterworfenen Strömungsquerschnittes des Elektronenstromes bezogen.

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_1 - p \cos \varphi + \frac{p}{q_0 u_1} f(w_1; \varphi) \\ q_0 u &= q_0 u_1 + p \{g(w_1; \varphi) + \gamma_1 f(w_1; \varphi)\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Hierbei ergeben die mit dem Index 1 bezeichneten Größen wie F_1 , u_1 die stationären Werte für $p=0$. w_1 bedeutet den stationären Laufwinkel der Elektronen, gezählt von der Eintrittsstelle in den Steuerraum. Die Größe γ_1 ist die logarithmische Beschleunigung

$$\gamma_1 = \frac{F_1}{u_1} = \frac{d \ln u_1}{d w_1}. \quad (5)$$

Die Funktionen $f(w_1; \varphi)$ und $g(w_1; \varphi)$ sind gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} f(w_1; \varphi) &= f_\varphi(w_1) = w_1 \sin(w_1 - \varphi) + \cos(w_1 - \varphi) - \cos \varphi \\ g(w_1; \varphi) &= g_\varphi(w_1) = -\sin(w_1 - \varphi) - \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Die stationären Werte F_1 , u_1 und w_1 beziehen sich auf jeden Punkt im Inneren und am Rande des Entladungsraumes. Meist werden wir uns nur für die Werte am Ende der Steuerstrecke interessieren, wie das für w_1 in Abb. 1 angedeutet ist.

Die Laufwinkelabhängigkeiten von F_1 und u_1 werden durch die folgenden Zusammenhänge geregelt:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F_1 &= \alpha_1 + w_1 \\ 2 q_0 u_1 &= 2 q_0 + 2 \alpha_1 w_1 + w_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die dimensionslose Feldkonstante α_1 gibt die Feldstärke am Anfang des Steuerraumes. Für $w_1=0$ erhält man nämlich

$$F_1 = \frac{\alpha_1}{q_0}.$$

Treten die Elektronen im Steuerraum in ein bremsendes Feld, so ist $\alpha_1 < 0$, andernfalls positiv. Der wirkliche Laufwinkel w_1 hängt mit dem virtuellen Laufwinkel z_1 zusammen durch die Laufzeitgleichung

$$6 q_0 z_1 = 6 q_0 w_1 + 3 \alpha_1 w_1^2 + w_1^3. \quad (8)$$

Die Beeinflussung der Elektronen, die sich mit einer solchen Einkreis-Steuerung erzielen läßt, ist ausführlich in der unter [6] zitierten Arbeit erörtert. Zu erwähnen ist noch, daß die Gleichungen (4) sich in ihren Aussagen auf die stromlinearen Anteile erschöpfen, also nur die Glieder in p , nicht aber Terme in p^2 und höheren Potenzen enthalten.

Wir untersuchen jetzt die Frage, in welcher Weise sich die Steuerwirkung verändert, wenn man den vorhin betrachteten

Steuerraum von der Laufwinkellänge w_1 in zwei oder mehrere Teile auflöst und jeder dieser Teilstrecken wieder dieselbe Stromaussteuerung p erteilt, hierbei aber eine derartige Phasenverschiebung wählt, daß der Strom in jedem Kreis gerade um einen Phasenwinkel gegenüber dem Strom in dem vorhergehenden Kreis nacheilt, der dem Laufwinkel in diesem Kreis entspricht. Dann haben wir beispielsweise in einer dreikreisigen Steuerstrecke mit den Laufwinkeln w_1 ; w_2 und w_3 die Ströme

$$p \sin \varphi; p \sin (\varphi - w_1); p \sin (\varphi - w_1 - w_2).$$

Abb. 2 zeigt eine solche Dreikreis-Steuerstrecke. Betrachtet man die verschiedenphasigen Steuerfelder als eines, dann bewegt sich dieses in Strahlrichtung mit einer Geschwindigkeit, die in erster Näherung

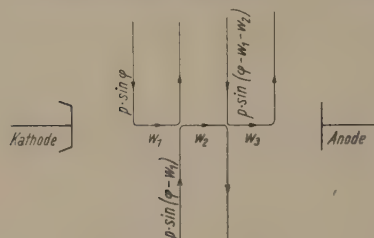


Abb. 2. Dreikreis-Steuerstrecke.

mit der der Elektronen selbst übereinstimmt. Die Annäherung wird offenbar umso besser, je weiter die Unterteilung der Steuerstrecke getrieben wird. Im folgenden werden wir die Formeln für eine n -kreisige Steuerstrecke entwickeln. Läßt man in diesem Ergebnis $n \rightarrow \infty$ gehen, dann entspricht das dem Fall, in dem das Steuerfeld

sich an jeder Stelle mit der dort herrschenden Elektronengeschwindigkeit bewegt. Die Flächen, über die den einzelnen Abschnitten die entsprechenden Steuerströme zugeführt werden — man vergleiche hierzu Abb. 2 — können wir als idealisierte Elektroden (Gitter) auffassen, oder aber uns ganz wegdenken und die in Laufrichtung des Strahles verlaufenden Stromfäden als Streulinien ansehen, die von außerhalb der Strömung liegenden Elektroden ausgehen. In beiden Fällen treffen wir die Annahme, daß an den Grenzstellen zweier aufeinander folgenden Abschnitte keine sprunghafte Änderung der stationären Verhältnisse ($p = 0$) erfolgt. Die in die Strömung eingebrachten Gitter müssen also auf das Raumpotential der Strömung gebracht werden. Unter dieser Voraussetzung verläuft die Feldstärke F_1 im stationären Zustand innerhalb der gesamten Steuerstrecke vollkommen stetig und damit ist auch die logarithmische Beschleunigung eine stetige Funktion des Laufwinkels.

Zunächst behandeln wir die Zweikreis-Steuerstrecke. Für die erste Teilstrecke gelten die Gleichungen (4). Im zweiten Teilraum haben wir einen Strom von der Größe $p \sin (\varphi - w_1)$. Die Formeln für diesen Raum entnehmen wir einer Arbeit [7] des Verfassers über Zweikreissysteme. Es handelt sich hierbei

um die Gleichungen (184) und (185). Wegen des verschwindenden Beschleunigungssprunges ist $\gamma_{12} = 0$ zu setzen. Da die Stromaussteuerungen in beiden Abschnitten gleich groß sind, ist $p_1 = p_2 = p$. Für die Phasenkonstante δ_2 ist

$$\delta_2 = -w_1$$

zu setzen. Damit erhalten wir für den zweiten Abschnitt:

$$\begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_2 - p \cos(\varphi - w_1) + \frac{p}{q_0 u_2} \{ f(w_1; \varphi - w_2) + \\ &+ f(w_2; \varphi - w_1) - w_2 g(w_1; \varphi - w_2) \} \\ q_0 u &= q_0 u_2 + p \{ g(w_1; \varphi - w_2) + g(w_2; \varphi - w_1) + \\ &+ \gamma_2 [f(w_1; \varphi - w_2) + f(w_2; \varphi - w_1) - w_2 g(w_1; \varphi - w_2)] \}. \end{aligned}$$

Für die hierin auftretenden stationären Größen F_2 , u_2 und w_2 gelten nach [7] die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F_2 &= \alpha_2 + w_2 \\ 2 q_0 u_2 &= 2 q_0 u_1 + 2 \alpha_2 w_2 + w_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Der virtuelle Laufwinkel z_2 ist mit dem wirklichen Laufwinkel w_2 wieder durch die entsprechende Laufzeitgleichung

$$6 q_0 z_2 = 6 q_0 u_1 w_2 + 3 \alpha_2 w_2^2 + w_2^3 \quad (10)$$

verknüpft. Die Zählung aller Größen erfolgt vom Anfangspunkt des zweiten Abschnittes aus. Die Feldkonstante α_2 ist hier nicht mehr frei wählbar, sondern muß so bestimmt werden, daß kein Feldstärkesprung an der Grenze zwischen beiden Abschnitten auftritt. Am Ende des ersten Abschnittes folgt für die Feldstärke aus der ersten Gleichung von (7) der Wert

$$F_1 = \frac{\alpha_1 + w_1}{q_0}.$$

Am Anfang des zweiten Abschnittes erhält man mit $w_2 = 0$ aus der ersten Gleichung von (9) den Wert

$$F_2 = \frac{\alpha_2}{q_0}.$$

Da wir keinen Feldstärkesprung haben, müssen diese beiden Ausdrücke identisch sein, es wird

$$\alpha_2 = \alpha_1 + w_1.$$

Berücksichtigt man dies in (9) und (10), so erhält man nach einfacher Rechnung

$$\left. \begin{aligned} q_0 F_2 &= \alpha_1 + (w_1 + w_2) \\ 2 q_0 u_2 &= 2 q_0 + 2 \alpha_1 (w_1 + w_2) + (w_1 + w_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$6 q_0 z_2 = 6 q_0 (w_1 + w_2) + 3 \alpha_1 (w_1 + w_2)^2 + (w_1 + w_2)^3. \quad (12)$$

Das sind analog gebaute Gleichungen zu (7) und (8), wobei w_1 durch $w_1 + w_2$ ersetzt ist. Das ist fast selbstverständlich, weil man wegen des verschwindenden Beschleunigungssprunges die ganze Strecke von der Länge $w_1 + w_2$ als eine kontinuierliche Fortsetzung des ersten Abschnittes auffassen kann.

Überträgt man diese Erkenntnis auf die allgemeinen Gleichungen für den zweiten Abschnitt, nimmt aber zunächst an, daß keine Phasenverschiebung in den Strömen vorliegt, dann ergäbe sich aus (4) sogleich

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_2 - p \cos \varphi + \frac{p}{q_0 u_2} f(w_1 + w_2; \varphi) \\ q_0 u &= q_0 u_2 + p \{g(w_1 + w_2; \varphi) + \gamma_2 f(w_1 + w_2; \varphi)\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Es liegt daher der Gedanke nahe, in den weiter oben stehenden allgemeinen Gleichungen, in welchen die Phasenverschiebung berücksichtigt ist, die Terme $f(w_1 + w_2; \varphi)$ und $g(w_1 + w_2; \varphi)$ abzuspalten. Dies gelingt in übersichtlicher Form durch Berücksichtigung der folgenden Funktionalgleichungen für die Funktionen g und f , von deren Bestehen man sich leicht überzeugt:

$$\left. \begin{aligned} g(x; \varphi - y) + g(y; \varphi - x) &= g(x + y; \varphi) + \\ &+ g(y; \varphi - x) - g(y; \varphi), \\ f(x; \varphi - y) + f(y; \varphi - x) - y g(x; \varphi - y) &= \\ &= f(x + y; \varphi) + f(y; \varphi - x) - f(y; \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Hiermit erhält man:

$$\begin{aligned} f(w_1; \varphi - w_2) + f(w_2; \varphi - w_1) - w_2 g(w_1; \varphi - w_2) &= \\ &= f(w_1 + w_2; \varphi) + f(w_2; \varphi - w_1) - f(w_2; \varphi), \\ g(w_1; \varphi - w_2) + g(w_2; \varphi - w_1) &= \\ &= g(w_1 + w_2; \varphi) + g(w_2; \varphi - w_1) - g(w_2; \varphi). \end{aligned}$$

So ergibt sich schließlich für den zweiten Abschnitt das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_2 - p \cos(\varphi - w_1) + \frac{p}{q_0 u_2} \{f(w_1 + w_2; \varphi) + \\ &+ \underline{f(w_2; \varphi - w_1) - f(w_2; \varphi)}\} \\ q_0 u &= q_0 u_2 + p \{g(w_1 + w_2; \varphi) + \underline{g(w_2; \varphi - w_1) -} \\ &- \underline{g(w_2; \varphi)} + \gamma_2 [f(w_1 + w_2; \varphi) + \\ &+ \underline{f(w_2; \varphi - w_1) - f(w_2; \varphi)}]\}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem bei phasengleichen Strömen, so läßt sich leicht ablesen, welche Glieder durch die Phasenverschiebung hinzutreten. Sie sind in (15) durch Unterstreichung hervorgehoben. Der Term $p \cos (\varphi - w_1)$ ist nicht besonders gekennzeichnet, da er unmittelbar durch die geänderten Phasenverhältnisse zustande kommt und ohne weitere Rechnung angeschrieben werden kann. Es gibt einfach den Feldanteil, der durch den Verschiebungsstrom ohne Anwesenheit von Elektronen hervorgerufen wird.

Wir setzen nun:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\varphi) &= \frac{1}{q_0 u_1} f(w_1; \varphi) \\ C_1(\varphi) &= g(w_1; \varphi) \\ B_1(\varphi) &= C_1(\varphi) + \gamma_1 q_0 u_1 A_1(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

und erhalten für den ersten Teilraum der Steuerstrecke nach (4) die Darstellung:

$$\begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_1 - p \cos \varphi + A_1(\varphi) p \\ q_0 u &= q_0 u_1 + B_1(\varphi) p. \end{aligned}$$

Ganz analog setzen wir im zweiten Teilraum

$$\left. \begin{aligned} A_2(\varphi) &= \frac{1}{q_0 u_2} \{ f(w_1 + w_2; \varphi) + f(w_2; \varphi - w_1) - f(w_2; \varphi) \} \\ C_2(\varphi) &= g(w_1 + w_2; \varphi) + g(w_2; \varphi - w_1) - g(w_2; \varphi) \\ B_2(\varphi) &= C_2(\varphi) + \gamma_2 q_0 u_2 A_2(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und bekommen aus (15)

$$\begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_2 - p \cos (\varphi - w_1) + A_2(\varphi) p \\ q_0 u &= q_0 u_2 + B_2(\varphi) p. \end{aligned}$$

Um eine allgemeine Rekursionsformel für die Funktionen $A_2(\varphi)$ und $B_2(\varphi)$ zu erhalten, die sich auch für eine n -fache Unterteilung der Steuerstrecke eignet, müssen wir $A_2(\varphi)$ und $B_2(\varphi)$ mit $A_1(\varphi)$ und $B_1(\varphi)$ in Zusammenhang bringen. Das gelingt durch Anwendung zweier Gleichungen aus einer Untersuchung über Dreikammersysteme [8], und zwar handelt es sich um die Formeln (312) und (313). Wir haben den Index 3 durch 1 auszutauschen und erhalten für (312) und wegen $p_1 = p_2 = p$:

$$\begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_2 - p \cos (\varphi + \delta_2) - \frac{p}{q_0 u_2} \{ w_2 [B_1(\varphi - w_2) - \\ &- u_2 A_1(\varphi - w_2)] - q_0 u_1 A_1(\varphi - w_2) \} + \frac{p}{q_0 u_2} f(w_2; \varphi + \delta_2). \end{aligned}$$

Nun ist

$$B_1(\varphi - w_2) - \alpha_2 A_1(\varphi - w_2) = C_1(\varphi - w_2) + \gamma_1 q_0 u_1 A_1(\varphi - w_2) - \alpha_2 A_1(\varphi - w_2).$$

Der zweite und dritte Term der rechten Seite heben sich wegen des verschwindenden Beschleunigungssprunges gerade auf. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \gamma_1 q_0 u_1 A_1(\varphi - w_2) - \alpha_2 A_1(\varphi - w_2) &= \\ &= q_0 u_1 \left(\gamma_1 - \frac{\alpha_2}{q_0 u_1} \right) A_1(\varphi - w_2). \end{aligned}$$

Wegen

$$\gamma_1 = \frac{F_1}{u_1} = \frac{q_0 F_1}{q_0 u_1} = \frac{\alpha_1 + w_1}{q_0 u_1}$$

erhält man

$$\gamma_1 - \frac{\alpha_2}{q_0 u_1} = \frac{1}{q_0 u_1} (\alpha_1 + w_1 - \alpha_2) = 0.$$

Somit wird

$$B_1(\varphi - w_2) - \alpha_2 A_1(\varphi - w_2) = C_1(\varphi - w_2).$$

Es ergibt sich damit für die Feldstärke im zweiten Teilraum die Formel

$$\begin{aligned} q_0 F - q_0 F_2 - p \cos(\varphi + \delta_2) + \frac{p}{q_0 u_2} \{ q_0 u_1 A_1(\varphi - w_2) + \\ + f(w_2; \varphi + \delta_2) - w_2 C_1(\varphi - w_2) \} \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} A_2(\varphi) = \frac{1}{q_0 u_2} \{ q_0 u_1 A_1(\varphi - w_2) + f(w_2; \varphi + \delta_2) - \\ - w_2 C_1(\varphi - w_2) \}. \end{aligned} \quad (18)$$

Aus Gleichung (313) der zitierten Arbeit findet man mit $p_1 = p_2$ und durch Vertauschung des Index 3 und 1 für die Geschwindigkeit

$$q_0 u = q_0 u_2 + \{ C_1(\varphi - w_2) + g(w_2; \varphi + \delta_2) + \gamma_2 q_0 u_2 A_2(\varphi) \} p.$$

Hieraus folgt

$$B_2(\varphi) = C_1(\varphi - w_2) + g(w_2; \varphi + \delta_2) + \gamma_2 q_0 u_2 A_2(\varphi)$$

und wegen der dritten Gleichung von (17):

$$C_2(\varphi) = C_1(\varphi - w_2) + g(w_2; \varphi + \delta_2). \quad (19)$$

Setzt man noch für die Phasenkonstante den Wert $\delta_2 = -w_1$, so wird aus (18) und (19)

$$A_2(\varphi) = \frac{1}{q_0 u_2} \{q_0 u_1 A_1(\varphi - w_2) + f(w_2; \varphi - w_1) - w_2 C_1(\varphi - w_2)\}$$

$$C_2(\varphi) = C_1(\varphi - w_2) + g(w_2; \varphi - w_1).$$

Damit haben wir die gesuchten Rekursionsformeln, die sich ohne weitere Rechnung durch geeignete Indexvertauschung sofort auf eine beliebige Zahl von Unterteilungen der Steuerstrecke erweitern lassen, da jeder weitere Schritt sich nach denselben Gesetzmäßigkeiten vollzieht. Aus (18) wird offenbar

$$A_m(\varphi) = \frac{1}{q_0 u_m} \{q_0 u_{m-1} A_{m-1}(\varphi - w_m) + f(w_m; \varphi + \delta_m) - w_m C_{m-1}(\varphi - w_m)\}. \quad (20)$$

aus (19)

$$C_m(\varphi) = C_{m-1}(\varphi - w_m) + g(w_m; \varphi + \delta_m). \quad (21)$$

Ferner gilt

$$B_m(\varphi) = C_{m-1}(\varphi) + \gamma_m q_0 u_m A_m(\varphi). \quad (22)$$

Im Teilraum mit dem Index m haben wir dann die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_m - p \cos(\varphi + \delta_m) + A_m(\varphi) p \\ q_0 u &= q_0 u_m + B_m(\varphi) p. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die Phasenkonstante δ_m — man vergleiche hierzu Abb. 2 — ist gegeben durch

$$\delta_m = -(w_1 + w_2 + w_3 + \dots w_{m-1}). \quad (24)$$

Sämtliche Gleichungen gelten für $m = 1, 2, 3, \dots n$.

Grundsätzlich läßt sich durch sukzessive Anwendung der Rekursionsformeln das allgemeine Bildungsgesetz für die Funktionen A_m und C_m ermitteln. Dieser Weg erweist sich jedoch als recht undurchsichtig. Wir schlagen daher ein anderes Verfahren ein, indem wir für einen kleinen Wert des Index m das Bildungsgesetz zu vermuten trachten; nachträglich werden wir seine allgemeine Gültigkeit durch vollständige Induktion beweisen. Beim Index $m = 2$ ist die allgemeine Gesetzmäßigkeit noch nicht zu durchschauen. Wir berechnen daher zunächst noch C_3 und A_3 . Es gilt:

$$C_3(\varphi) = C_2(\varphi - w_3) + g(w_3; \varphi - w_1 - w_2).$$

Nach (17) ist

$$C_2(\varphi - w_3) = g(w_1 + w_2; \varphi - w_3) + g(w_2; \varphi - w_1 - w_3) - g(w_2; \varphi - w_3).$$

Hieraus erhält man

$$C_3(\varphi) = g(w_1 + w_2; \varphi - w_3) + g(w_2; \varphi - w_1 - w_3) - \\ - g(w_2; \varphi - w_3) + g(w_3; \varphi - w_1 - w_2).$$

Das erste und vierte Glied liefern zusammen nach der Funktionalgleichung (14)

$$g(w_1 + w_2 + w_3; \varphi) + g(w_3; \varphi - w_1 - w_2) - g(w_3; \varphi),$$

daher wird

$$C_3(\varphi) = g(w_1 + w_2 + w_3; \varphi) + g(w_3; \varphi - w_1 - w_2) - \\ - g(w_3; \varphi) + g(w_2; \varphi - w_1 - w_3) - g(w_2; \varphi - w_3).$$

Das vierte Glied ergibt nach (14) aufgelöst:

$$g(w_2; \varphi - w_1 - w_3) = g(w_2 + w_3; \varphi - w_1) - g(w_3; \varphi - w_1).$$

Für das fünfte bekommt man:

$$g(w_2 + w_3; \varphi) - g(w_3; \varphi).$$

Wir erhalten somit

$$C_3(\varphi) = g(w_1 + w_2 + w_3; \varphi) + g(w_2 + w_3; \varphi - w_1) - \\ - g(w_2 + w_3; \varphi) + g(w_3; \varphi - w_1 - w_2) - g(w_3; \varphi - w_1).$$

Nun setzen wir

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_m = \lambda_m. \quad (25)$$

Damit wird

$$C_3(\varphi) = g(\lambda_3; \varphi) + g(\lambda_3 - \lambda_1; \varphi - \lambda_1) - g(\lambda_3 - \lambda_1; \varphi) + \\ + g(\lambda_3 - \lambda_2; \varphi - \lambda_2) - g(\lambda_3 - \lambda_2; \varphi - \lambda_1)$$

oder anders geschrieben

$$C_3(\varphi) = g(\lambda_3; \varphi) + \sum_{i=1}^2 \{g(\lambda_3 - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - \\ - g(\lambda_3 - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1})\}. \quad (26)$$

Eine ganz analoge Darstellung ergibt sich für $A_3(\varphi)$. Aus (20) ergibt sich

$$q_0 u_3 A_3(\varphi) = q_0 u_2 A_2(\varphi - w_3) + f(w_3; \varphi - w_1 - w_2) - \\ - w_3 C_2(\varphi - w_3).$$

Die ersten beiden Gleichungen von (17) benützt, erhält man

$$q_0 u_3 A_3(\varphi) = f(w_1 + w_2; \varphi - w_3) + f(w_2; \varphi - w_1 - w_3) - \\ - f(w_2; \varphi - w_3) - w_3 g(w_1 + w_2; \varphi - w_3) - \\ - w_3 g(w_2; \varphi - w_1 - w_3) + w_3 g(w_2; \varphi - w_3) + f(w_3; \varphi - w_1 - w_2).$$

Wendet man auf die Terme 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 die zweite Funktionalgleichung von (14) an, so findet man

$$\begin{aligned} q_0 u_3 A_3(\varphi) &= f(w_1 + w_2 + w_3; \varphi) - f(w_3; \varphi) + f(w_2 + w_3; \varphi - w_1) - \\ &- f(w_3; \varphi - w_1) - f(w_2 + w_3; \varphi) + f(w_3; \varphi) + f(w_3; \varphi - w_1 - w_2) = \\ &= f(\lambda_3; \varphi) + f(\lambda_3 - \lambda_1; \varphi - \lambda_1) - f(\lambda_3 - \lambda_1; \varphi) + \\ &+ f(\lambda_3 - \lambda_2; \varphi - \lambda_2) - f(\lambda_3 - \lambda_2; \varphi - \lambda_1) \end{aligned}$$

oder

$$q_0 u_3 A_3(\varphi) = f(\lambda_3; \varphi) + \sum_{i=1}^2 \{ f(\lambda_3 - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - f(\lambda_3 - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \}. \quad (26a)$$

Auf Grund dieses Ergebnisses werden wir die folgenden allgemeinen Bildungsgesetze vermuten:

$$\left. \begin{aligned} q_0 u_m A_m(\varphi) &= f(\lambda_m; \varphi) + \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - \\ &- f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \} \\ C_m(\varphi) &= g(\lambda_m; \varphi) + \sum_{i=1}^{m-1} \{ g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - \\ &- g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Nun haben wir die allgemeine Gültigkeit dieser Gleichungen durch vollständige Induktion zu beweisen. Für den Index $m+1$ ergibt sich aus (20) wegen

$$\delta_{m+1} = -\lambda_m$$

und unter Berücksichtigung von (27):

$$\begin{aligned} q_0 u_{m+1} A_{m+1}(\varphi) &= q_0 u_m A_m(\varphi - w_{m+1}) + f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_m) - \\ &- w_{m+1} C_m(\varphi - w_{m+1}) = f(\lambda_m; \varphi - w_{m+1}) + \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \\ &- \lambda_i - w_{m+1}) - f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1} - w_{m+1}) \} + f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_m) - \\ &- w_{m+1} g(\lambda_m; \varphi - w_{m+1}) - \sum_{i=1}^{m-1} \{ w_{m+1} g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i - w_{m+1}) - \\ &- g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1} - w_{m+1}) \}. \end{aligned}$$

Die drei außerhalb der Summenzeichen stehenden Glieder ergeben nach der zweiten Gleichung von (14):

$$f(\lambda_m + w_{m+1}; \varphi) + f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_m) - f(w_{m+1}; \varphi).$$

Nach (25) ist nun

$$\lambda_m + w_{m+1} = \lambda_{m+1},$$

wir bekommen also

$$\begin{aligned} q_0 u_{m+1} A_{m+1}(\varphi) &= f(\lambda_{m+1}; \varphi) + f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_m) - f(w_{m+1}; \varphi) + \\ &+ \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i - w_{m+1}) - w_{m+1} g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i - w_{m+1}) \} - \\ &- \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1} - w_{m+1}) - \\ &- w_{m+1} g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1} - w_{m+1}) \}. \end{aligned}$$

Eine abermalige Anwendung der Funktionalgleichung (14) auf die unter den Summenzeichen stehenden Terme ergibt:

$$\begin{aligned} f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i - w_{m+1}) - w_{m+1} g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i - w_{m+1}) &= \\ = f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_i) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1} - w_{m+1}) - w_{m+1} g(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1} - w_{m+1}) &= \\ = f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) - f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_{i-1}). \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} q_0 u_{m+1} A_{m+1}(\varphi) &= f(\lambda_{m+1}; \varphi) + f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_m) - f(w_{m+1}; \varphi) - \\ &- \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \} - \\ &- \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_i) - f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_{i-1}) \}. \end{aligned}$$

Die zweite Summe läßt sich leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=1}^{m-1} f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{m-1} f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_{i-1}) = \\ &= - \sum_{i=2}^m f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_{i-1}) + \sum_{i=1}^{m-1} f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_{i-1}) = \\ &= f(w_{m+1}; \varphi) - f(w_{m+1}; \varphi - \lambda_{m-1}). \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} q_0 u_{m+1} A_{m+1}(\varphi) &= f(\lambda_{m+1}; \varphi) + \sum_{i=1}^{m-1} \{ f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - \\ &- f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \} + f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_m) - \\ &- f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_{m-1}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} q_0 u_{m+1} A_{m+1}(\varphi) &= f(\lambda_{m+1}; \varphi) + \sum_{i=1}^m \{ f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - \\ &- f(\lambda_{m+1} - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß das Bildungsgesetz, das wir für den Index m vermutet hatten, auch für den Index $m+1$ gilt. In ganz analoger Weise beweist man die allgemeine Gültigkeit der zweiten Gleichung von (27).

Die unter dem Summenzeichen stehenden Glieder geben den Einfluß, der durch die Phasenverschiebung der Teilströme in den einzelnen Steuerstrecken hervorgerufen wird. In (27) bleibt nur das Glied $f(i_m; \varphi)$, bzw. $g(i_m; \varphi)$ stehen, wenn alle Ströme gleichphasig wären. Dasselbe tritt ein, wenn jede Teilstrecke die Laufwinkellänge von 2π hat. In diesem Falle wird $\lambda_i = 2\pi i$ und $\lambda_{i-1} = 2\pi(i-1)$. Die zweiten Argumente der unter dem Summenzeichen stehenden Funktionen unterscheiden sich daher um 2π . Wegen des periodischen Charakters der Funktionen f und g hinsichtlich des zweiten Argumentes heben sich dann die beiden unter dem Summenzeichen stehenden Terme gerade auf, die Summen selbst verschwinden. Das diametrale Gegenstück hierzu bekommen wir, wenn jede Teilstrecke die Laufwinkellänge π besitzt. Dann unterscheiden sich λ_i und λ_{i-1} um π , die beiden Terme unter dem Summenzeichen nehmen entgegengesetztes Vorzeichen an.

Die stationären Gleichungen für die Größen F_i , u_i und z_i nehmen nach (11) und (12) die Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F_i &= \alpha_1 + \lambda_i \\ 2 q_0 u_i &= 2 q_0 + 2 \alpha_1 \lambda_i + \lambda_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$6 q_0 z_i = 6 q_0 \lambda_i + 3 \alpha_1 \lambda_i^2 + \lambda_i^3. \quad (29)$$

III. Dynamisches Steuerfeld von Elektronengeschwindigkeit.

Eine besonders übersichtliche Gestalt unserer Ergebnisse über das n -Kreissystem mit phasenverschobenen Steuerkreisen ergibt sich, wenn man die Laufwinkellänge jeder Teilstrecke zu Null zusammenschrumpfen und ihre Gesamtzahl n über alle Grenzen wachsen läßt. Dann bekommen wir nämlich ein dynamisches Steuerfeld, welches sich an jeder Stelle mit der dort herrschenden Elektronengeschwindigkeit bewegt. Die Summen von (27) gehen dann in Integrale über, die sich leicht berechnen lassen.

Zunächst sei bemerkt, daß man die Summenbildungen in (27) auch von $i=1$ bis m erstrecken kann, ohne den Wert der Summen zu verändern. Denn hierdurch treten in der ersten Gleichung die Glieder

$$f(0; \varphi - \lambda_m) - f(0; \varphi - \lambda_{m-1}),$$

in der zweiten die Glieder

$$g(0, \varphi - \lambda_m) - g(0; \varphi - \lambda_{m-1})$$

hinzu. Jeder Term für sich verschwindet nach (6). Wir berechnen zunächst

$$S(\lambda_m; \varphi) = \sum_{i=1}^m \{ f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) \}.$$

Die unter dem Summenzeichen stehenden beiden Terme lassen sich nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} & f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) - f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_{i-1}) = \\ &= - \{ f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i + (\lambda_i - \lambda_{i-1})) - f(\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i) \} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \varphi} f[\lambda_m - \lambda_i; \varphi - \lambda_i + \vartheta_i (\lambda_i - \lambda_{i-1})] \cdot (\lambda_i - \lambda_{i-1}). \end{aligned}$$

Hieraus wird wegen

$$\frac{\partial f(x; \varphi)}{\partial \varphi} = f\left(x; \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

der Ausdruck

$$-f\left[\lambda_m - \lambda_i; \varphi + \frac{\pi}{2} - \lambda_i + \vartheta_i (\lambda_i - \lambda_{i-1})\right] (\lambda_i - \lambda_{i-1}).$$

Dabei ist unter ϑ_i ein geeigneter Wert zwischen 0 und 1 zu verstehen. Wir erhalten also für die Summe:

$$S(\lambda_m; \varphi) = - \sum_{i=1}^m f\left[\lambda_m - \lambda_i; \varphi + \frac{\pi}{2} - \lambda_i + \vartheta_i (\lambda_i - \lambda_{i-1})\right] (\lambda_i - \lambda_{i-1}).$$

Durch den vorhin beschriebenen Grenzübergang $\lambda_i - \lambda_{i-1} \rightarrow 0$ ergibt sich somit

$$S(\lambda; \varphi) = - \int_0^{\lambda} f\left(\lambda - x; \varphi + \frac{\pi}{2} - x\right) dx. \quad (30)$$

In ganz analoger Weise ermittelt man die Summe $T(\lambda_m; \varphi)$ in der zweiten Gleichung von (27).

$$T(\lambda; \varphi) = - \int_0^{\lambda} g\left(\lambda - x; \varphi + \frac{\pi}{2} - x\right) dx. \quad (31)$$

Die Gleichungen (27) gehen damit über in

$$\begin{aligned} q_0 u(\lambda) \cdot A(\lambda; \varphi) &= f(\lambda; \varphi) + S(\lambda; \varphi) \\ C(\lambda; \varphi) &= g(\lambda; \varphi) + T(\lambda; \varphi). \end{aligned}$$

Die Integrale (30) und (31) lassen sich unter Benützung von (6) leicht ausrechnen. Nach einigen elementaren Umformungen erhält man:

$$\left. \begin{aligned} S(\lambda; \varphi) &= -f(\lambda; \varphi) + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos(\varphi - \lambda) \\ T(\lambda; \varphi) &= -g(\lambda; \varphi) - \lambda \cos(\varphi - \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Oben eingesetzt, ergibt dies:

$$\begin{aligned} q_0 u(\lambda) + A(\lambda; \varphi) &= \frac{1}{2} \lambda^2 \cos(\varphi - \lambda) \\ C(\lambda; \varphi) &= -\lambda \cos(\varphi - \lambda). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (23) gehen damit über in

$$\begin{aligned} q_0 F &= q_0 F(\lambda) - p \cos(\varphi - \lambda) + \frac{p}{q_0 u(\lambda)} \cdot \frac{1}{2} \lambda^2 \cos(\varphi - \lambda) \\ q_0 u &= q_0 u(\lambda) + \left\{ -\lambda + \gamma(\lambda) \cdot \frac{1}{2} \lambda^2 \right\} \cdot p \cos(\varphi - \lambda). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun den stationären Laufwinkel λ , wie bei der einkreisigen Steuerstrecke wieder mit w_1 , die entsprechenden stationären Größen $F(\lambda); u(\lambda)$ und $\gamma(\lambda)$ wieder sinngemäß mit $F_1; u_1$ und γ_1 , so ergibt sich für die Steuerung durch ein dynamisches Feld, das sich mit Elektronengeschwindigkeit bewegt:

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_1 - p \cos(\varphi - w_1) + \frac{p}{q_0 u_1} \cdot \frac{1}{2} w_1^2 \cos(\varphi - w_1) \\ q_0 u &= q_0 u_1 + \left\{ -w_1 + \gamma_1 \cdot \frac{1}{2} w_1^2 \right\} \cdot p \cos(\varphi - w_1). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Diese Gleichungen liefern uns das Gegenstück zum quasistationären Feld, bei dem die Feld- und Geschwindigkeitsverteilung durch die Gleichungen (4) gegeben werden.

Schon in der Einleitung hatten wir darauf hingewiesen, daß zwischen dem Falle des quasistationären Feldes bei quasistationärer Strömung $\left(w_1 \ll \frac{\pi}{2}\right)$ einerseits und dem Falle des dynamischen Feldes bei dynamischer Strömung andererseits eine weitgehende Verwandtschaft zu erwarten ist, falls sich das dynamische Feld an jeder Stelle mit Elektronengeschwindigkeit bewegt. Denn in beiden Fällen bewegt sich ein Elektron in einem zeitlich konstanten elektrischen Kräftefeld. Das können wir nun näher untersuchen. Zu diesem Zweck entwickeln wir die Funktionen $f(w_1; \varphi)$ und $g(w_1; \varphi)$ in den Gleichungen (4) in der Umgebung $w_1 = 0$ in Potenzreihen. Hierfür gelten die Formeln

$$\left. \begin{aligned} f(w_1; \varphi) &= \underline{\frac{1}{2} w_1^2 \cos \varphi} + \frac{1}{3} w_1^3 \sin \varphi + \dots \\ g(w_1; \varphi) &= \underline{-w_1 \cos \varphi} - \frac{1}{2} w_1^2 \sin \varphi + \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Benützt man die unterstrichenen Glieder der niedrigsten Potenzen in w_1 , so erhält man für (4)

$$\left. \begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_1 - p \cos \varphi + \frac{p}{q_0 u_1} \cdot \frac{1}{2} w_1^2 \cos \varphi \\ q_0 u &= q_0 u_1 + \left\{ -w_1 + \frac{1}{2} w_1^2 \gamma_1 \right\} \cdot p \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Ersetzt man hierin rein formal φ durch $\varphi - w_1$, so erhält man die dynamischen Gleichungen (33). *Es gelten also bei dynamischem Feld, das sich mit Elektronengeschwindigkeit bewegt, bei beliebigem Laufwinkel für die Feld- und Geschwindigkeitsverteilung dieselben Gleichungen wie bei quasistationärem Feld und quasistationärer Strömung, wenn man die durch die endliche Größe des Laufwinkels w_1 hervorgerufene Phasennach-eilung in den periodischen Gliedern berücksichtigt.* Einschränkung hierzu ist zu bemerken, daß dieser einfache Zusammenhang aber nur dann gilt, wenn die quasistationären Verhältnisse durch die ersten unterstrichenen Glieder von (34) richtig wiedergegeben werden.

Die Bedeutung dieser Einschränkung erkennt man am besten aus einem Anwendungsbeispiel. Wir behandeln eine Steuerstrecke, die sich unmittelbar an eine im Raumladungsgebiet betriebene Kathode anschließt. Die Elektronen sollen die Kathode mit der Geschwindigkeit Null verlassen. In diesem Falle wird nach [6]:

$$\begin{aligned} q_0 F_1 &= w_1 \\ 2 q_0 u_1 &= w_1^2 \end{aligned}$$

also

$$\gamma_1 = \frac{2}{w_1}.$$

Würde man nur die unterstrichenen Glieder von (34) berücksichtigen, so bekäme man nach (35)

$$\begin{aligned} q_0 F &= q_0 F_1 \\ q_0 u &= q_0 u_1, \end{aligned}$$

also überhaupt keine Wechselfeldstärke. Die ausschließliche Berücksichtigung der unterstrichenen Glieder ist in diesem

Fälle daher nicht ausreichend. Nimmt man hingegen die folgenden Glieder hinzu und schreibt nur den Term mit der niedrigsten Potenz in w_1 an, so bekommt man das richtige Ergebnis

$$q_0 F = q_0 F_1 + \frac{2}{3} w_1 \sin \varphi \cdot p$$

$$q_0 u = q_0 u_1.$$

Wir haben hier die bekannte Dichtesteuerung, bei der die Geschwindigkeitsschwankung verschwindet. Näheres hierüber findet man unter [6].

Im Gegensatz hierzu bekommt man bei dynamischem Feld, das sich mit Elektronengeschwindigkeit bewegt, nach (33) überhaupt keine Wechselfeldstärke. Die Wechselfeldstärke $-p \cos(\varphi - w_1)$ die durch den Steuerstrom $p \sin(\varphi - w_1)$ ohne Anwesenheit von Elektronen hervorgerufen würde, wird durch die zeitlich schwankende Elektronendichte gerade aufgehoben. Das heißt, der gesamte Strom ist an jeder Stelle ein reiner Konvektionsstrom.

IV. Verstärkungseigenschaften bei dynamischem Steuerfeld von Elektronengeschwindigkeit.

Wir schreiten nun zur weiteren Diskussion der Gleichungen (33). Die Wechselfeldstärke an der Stelle w_1 setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil $-p \cos(\varphi - w_1)$ rührt her von dem Steuerstrom $p \sin(\varphi - w_1)$. Bei abgeschaltetem Elektronenstrom bleibt dieser Teil unverändert. Der zweite Term

$$\frac{p}{q_0 u_1} \cdot \frac{1}{2} w_1^2 \cos(\varphi - w_1)$$

gibt dagegen den Anteil der Wechselfeldstärke, der durch die Elektronen selbst hervorgerufen wird. Er enthält die Steuerwirkung des durchlaufenen Teils der Steuerstrecke. Die Beurteilung der Verstärkungswirkung läuft letzten Endes auf die Beurteilung dieses Ausdruckes hinaus. Wir wollen hier jedoch den Verschiebungsstrom, bzw. den Konvektionsstrom heranziehen. Der Verschiebungsstrom J_v ist nach [6] gegeben durch

$$\frac{J_v}{J_0} = q_0 \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

Das ergibt mit (33):

$$\frac{J_v}{J_0} = p \cdot \sin(\varphi - w_1) - \frac{p}{q_0 u_1} \frac{1}{2} w_1^2 \sin(\varphi - w_1). \quad (36)$$

Aus der Tatsache, daß die Summe aus Verschiebungsstrom und Konvektionsstrom gleich ist dem Gesamtstrom²⁾, können wir den Konvektionsstrom leicht berechnen. Aus

$$\frac{J_v}{J_0} + \frac{J_k}{J_0} = 1 + p \sin(\varphi - w_1)$$

folgt:

$$\frac{J_k}{J_0} = 1 + \frac{p}{q_0 u_1} \frac{w_1^2}{2} \sin(\varphi - w_1). \quad (37)$$

Das Wesentliche hierbei ist, daß der elektronische Anteil des Verschiebungsstromes, bzw. der Konvektionsstrom mit dem Quadrat des Laufwinkels zunehmen. Vergleicht man hiermit die entsprechenden Verhältnisse bei quasistationärem Steuerfeld, so zeigt sich, daß dort der Anstieg nur mit der ersten Potenz des Laufwinkels erfolgt. Es gilt nämlich nach (4):

$$\frac{J_v}{J_0} = p \sin \varphi + \frac{p}{q_0 u_1} \frac{\partial f(w_1; \varphi)}{\partial \varphi} \quad (38)$$

$$\frac{J_k}{J_0} = 1 - \frac{p}{q_0 u_1} \frac{\partial f(w_1; \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (39)$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß der nichtperiodische Anteil von $f(w_1; \varphi)$ proportional w_1 ist.

Die Bedeutung dieser Erkenntnis liegt darin, daß man bei gleicher Steueramplitude im dynamischen Fall eine erheblich größere Verstärkung bekommt als bei quasistationärem Feld. Der Unterschied in der Verstärkungswirkung ist umso größer, je größer der Laufwinkel w_1 ist. Da nun in beiden Fällen die durch den Schroteffekt hervorgerufenen Schwankungen in erster Näherung gleich groß sind, wird die Empfindlichkeit durch Anwendung dynamischer Steuerfelder und genügend großer Laufwinkel erheblich gesteigert. Man wird daher eine wesentlich bessere Grenzempfindlichkeit erwarten können, als sie mit quasistationären Steuerfeldern erreichbar ist.

Zur besseren Veranschaulichung untersuchen wir die Verhältnisse in einem besonders einfachen Fall. Die Steuerstrecke soll im stationären Zustand nahezu feldfrei sein, die Elektronen durchlaufen sie also mit der konstanten Anfangsgeschwindigkeit v_0 . Bevor sie in die Steuerstrecke eintreten durchlaufen sie eine Vorbeschleunigungskammer und gelangen durch eine Blende, bzw. durch ein Gitter mit der Geschwindigkeit v_0 in

²⁾ Es sei bemerkt, daß hier der Gesamtstrom nicht quellenfrei ist, da Stromfäden nach außen treten. Man vergleiche hierzu Abb. 2.

den Steuer Raum. Hier gelten daher nach [6] die Verhältnisse für einen raumladungsschwachen Entladungsraum:

$$F_1 \approx 0$$

$$u_1 = 1$$

$$\gamma_1 \approx 0.$$

Bei dynamischem Steuerfeld haben wir demnach für die Geschwindigkeit u , bzw. für den Konvektionsstrom die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 - \frac{p}{q_0} w_1 \cos(\varphi - w_1) \\ \frac{J_k}{J_0} &= 1 + \frac{p}{q_0} \frac{1}{2} w_1^2 \sin(\varphi - w_1). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

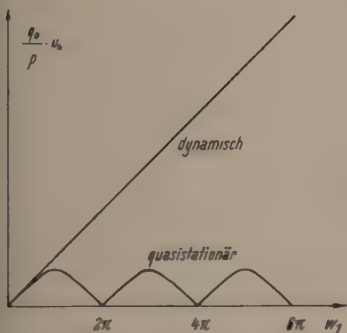


Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung bei feldfreiem Steuer Raum.

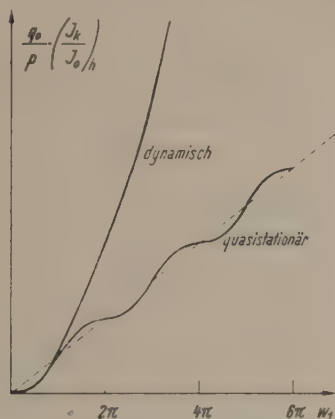


Abb. 4. Verteilung des Konvektionsstromes bei feldfreiem Steuer Raum.

Die Scheitelwerte sind demnach

$$\left. \begin{aligned} u_h &= -\frac{p}{q_0} w_1 \\ \left(\frac{J_k}{J_0} \right)_h &= -\frac{p}{q_0} \frac{1}{2} w_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Bei quasistationärem Steuerfeld hingegen erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 + \frac{p}{q_0} \left\{ \sin(\varphi - w_1) - \sin \varphi \right\} \\ \frac{J_k}{J_0} &= 1 + \frac{p}{q_0} \left\{ w_1 \cos(\varphi - w_1) + \sin(\varphi - w_1) - \sin \varphi \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Hieraus errechnen sich die Scheitelwerte zu

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{2p}{q_0} \left| \sin \frac{w_1}{2} \right| \\ \left(\frac{J_k}{J_0} \right)_h &= \frac{p}{q_0} \cdot \left[w_1 \cos w_1 - \sin w_1 \right]^2 + (w_1 \sin w_1 + \cos w_1 - 1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Abb. 3 zeigt die Laufwinkelabhängigkeit der Geschwindigkeitsamplitude. Da nach früheren Überlegungen die Formeln für das dynamische Steuerfeld aus den quasistationären Gleichungen durch Reihenentwicklung in der Umgebung $w_1 = 0$ hervorgehen, werden beide Kurven in der Nähe des Nullpunktes identisch. In Abb. 4 sind die entsprechenden Verhältnisse für den Konvektionsstrom dargestellt. Auch hier fallen beide Kurven in Nullpunktsnähe zusammen.

V. Die Wanderwellen-Röhre.

Es liegt der Gedanke nahe, ein dynamisches Steuerfeld durch eine reflexionsfrei abgeschlossene Leitung herzustellen. Hierbei treten zwei Schwierigkeiten auf. Die eine — man denke zunächst an eine *Lecher*-Leitung oder an ein koaxiales Kabel — liegt daran, daß die Fortpflanzungsrichtung der Welle senkrecht zur elektrischen Feldstärke und nicht parallel zu ihr verläuft. Diese Schwierigkeit läßt sich dadurch umgehen, daß man eine in einem Hohlleiter geführte Welle vom *E*-Typus benützt, die bekanntlich eine in der Längsachse des Hohlleiters gelegene elektrische Feldkomponente aufweist. Die zweite Schwierigkeit liegt in der enorm hohen Phasengeschwindigkeit, die bei der *Lecher*-Leitung fast den Wert der Lichtgeschwindigkeit erreicht, beim Hohlleiter diesen sogar noch übertrifft. Das Problem läuft also letzten Endes darauf hinaus, die Phasengeschwindigkeit einer E_{01} -Welle soweit herabzusetzen, daß sie an die Größe der üblichen Elektronengeschwindigkeit herankommt. *R. Kompfner* [1], sowie *J. R. Pierce* und *L. M. Field* [2] haben das Problem dadurch gelöst, daß sie dem Feld im Hohlleiter durch Einbringen eines schraubenförmig gewundenen Drahtes einen „Drall“ erteilten, ähnlich wie man das Geschöß innerhalb eines Gewehrlaufes zur Rotation um seine Längsachse veranlaßt. Die Stromringe der E_{01} -Welle sind bekanntlich in einem Längsschnitt des Hohlleiters ausgebreitet, sie sind an die Metallwand gefesselt und gleiten an ihr entlang. Treffen die Stromringe auf einen axial ausgespannten Draht, der in eine auseinandergezogene Spirale übergeht, dann werden sie an den Draht ebenso gefesselt wie an die Metallwand und zur Rotation gezwungen. Der Hauptteil des elektrischen Feldes läuft daher schräg über den Zylindermantel, auf den man sich den Draht

aufgewickelt denken kann. Das Feld im Inneren dieser Spule hat in der mittleren Zone angenähert axiale Richtung und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit, die mit zunehmendem Drall abnimmt. Abb. 5 zeigt das Schema der Wanderwellen-

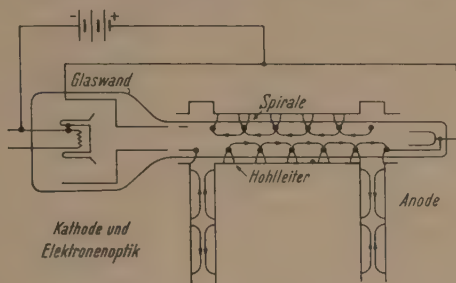


Abb. 5.
Wanderwellen-Röhre nach J. R. Pierce und L. M. Field.

Röhre. Die Elektronen laufen im Inneren der Spule mit konstanter Geschwindigkeit, die ihnen in einer Vorbeschleunigungskammer erteilt wird. Durch passende Wahl der Dralllänge und geeignete Einstellung der Beschleunigungsspannung kann Gleichlauf zwischen Feld und Elektronen hergestellt werden. Die Steuerwelle wird an der Stelle *E* durch einen Hohlleiter zugeführt, an der Stelle *A* wird die verstärkte Welle an die Fortsetzung des Hohlleiters abgegeben. Zur Vermeidung von Reflexionen an der Anfangsstelle der Spirale wird der Drall allmählich zum vollen Ausmaß erhöht. Eine ähnliche Maßnahme ist von den Schußwaffen her bekannt.

Mit der Wanderwellen-Röhre wurden bei 8,3 cm Wellenlänge Grenzemphindlichkeiten von rund 10 kT erreicht. Die benützte Gleichspannung betrug 1670 Volt, der die Spirale beherbergende Rohransatz hat eine Länge von 30 cm. Der Laufwinkel w_1 liegt demnach bei 82° . Die Elektronen sind also etwa 40 Perioden lang dem Einfluß des Wechselfeldes ausgesetzt, bis sie von der Anode aufgefangen werden. Als ein besonderer Vorteil dieser Anordnung ist hervorzuheben, daß die erzielte Verstärkung innerhalb eines Frequenzbandes von 800 MHz Breite praktisch frequenzunabhängig ist. Diese Eigenschaft kommt daher, daß keine frequenzbestimmenden Schaltelemente (Resonanzkreise) benützt werden.

Besonders bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß bei der Wanderwellen-Röhre die größte Verstärkung nicht bei exaktem Gleichlauf zwischen Feld und Elektronen erreicht wird, sondern dann, wenn das Feld sich ein bißchen langsamer bewegt als die Elektronen. Die hierbei ausgenützte Verstärkerwirkung ist daher eine andere, als die von uns untersuchte

(Relativgeschwindigkeit Null). Die diesbezüglichen Ergebnisse sind in der bereits angekündigten Arbeit von *R. Wiesner* enthalten.

VI. Zusammenfassung.

Eine ebene Elektronenströmung wird einem elektrischen Steuerfeld unterworfen, das sich in n -Abschnitte gliedert. Der Steuerstrom in den einzelnen Teilstrecken besitzt gleiche Amplitude. Die Phasenlagen sind so gewählt, daß der Strom in jeder Strecke dem Strom in der vorangehenden gerade um soviel nacheilt, wie die Elektronen zum Durchlaufen dieses Abschnittes an Zeit benötigen.

Durch Grenzübergang erhält man ein dynamisches Steuerfeld, das sich an jeder Stelle mit Elektronengeschwindigkeit bewegt. Es ergibt sich, daß für die Feld- und Geschwindigkeitsverteilung dieselben Gleichungen gelten wie bei quasistationärer Strömung, wenn man die durch die endliche Größe des Laufwinkels hervorgerufene Phasennacheilung in den periodischen Gliedern berücksichtigt.

Die Wechselfeldstärke, welche durch die Steuerwirkung in der Strömung hervorgerufen wird, nimmt bei quasistationärem Feld mit der ersten Potenz, bei dynamischem Feld dagegen mit dem Quadrat des Laufwinkels zu. Es läßt sich daher bei gleichem Laufwinkel mit einer dynamischen Steuerung von Elektronengeschwindigkeit eine erheblich größere Verstärkung erzielen. Da die Rauscheigenschaften in beiden Fällen etwa die gleichen sind, verbessert sich die Grenzemfindlichkeit wesentlich.

Für den Fall, daß sich die Elektronen in der Steuerstrecke mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, wird der Feld- und Geschwindigkeitsverlauf graphisch dargestellt.¹

Zum Schluß wird auf die Wanderwellen-Röhre (Traveling-Wave Tube) kurz eingegangen.

Literatur.

1. *Kompfner, R.*: The Traveling-Wave Valve, *Wir. World* **52**, 1946, 11.
2. *Pierce, J. R., Field, L. M.*: Traveling-Wave Tubes, *Proc. IRE* **35**, 1947, 2.
3. *Pierce, J. R.*: Theory of the beam-type Traveling-Wave Tube, *Proc. IRE* **35**, 1947, 2.
4. *Kompfner, R.*: The Traveling-Wave Tube as Amplifier at Microwaves, *Proc. IRE* **35**, 1947, 2.
5. *Rockett, F.*: Wideband Microwave Amplifier Tube, *Electronics*, **19**, 1946.
6. *König, H. W.*: Laufzeittheorie der Elektronenröhren. Erster Teil: Ein- und Mehrkreissysteme. S. 1—49. Wien: Springer-Verlag. 1948.
7. — Laufzeittheorie der Elektronenröhren. Erster Teil: Ein- und Mehrkreissysteme. S. 50—128. Wien: Springer-Verlag. 1948.
8. — Laufzeittheorie der Elektronenröhren. Erster Teil: Ein- und Mehrkreissysteme. S. 129—166. Wien: Springer-Verlag. 1948.

Neues Verfahren zur Messung von Krümmung und Streuwinkeln an Nebelkammerbahnen.

Von

Johanna Rüling und Herma Gheri.

Physikalisches Institut der Universität Innsbruck.

Mit 7 Abbildungen.

(Eingelangt am 8. März 1948.)

Einleitung.

Wird ein geladenes Teilchen durch ein homogenes Magnetfeld abgelenkt, beschreibt es eine Kurve, deren Krümmungsradius proportional dem Impuls des Teilchens ist. Die Kurve ist ein Kreisbogen, wenn die Impulsänderung längs der Bahn vernachlässigt werden kann. Der Krümmungsradius in Verbindung mit Ionisation oder Reichweite ist z. B. ein wichtiges Bestimmungsstück zur Ermittlung von Impuls und Masse von Mesonen. Jede verlässliche Massenbestimmung setzt daher die möglichst genaue Kenntnis des Krümmungsradius voraus.

Die Teilchenbahn wird in einer Nebelkammer sichtbar gemacht, photographiert und mit einer Meßmaschine oder einem Meßmikroskop ausgemessen. Die Bahn wird in erster Näherung als Kreisbogen aufgefaßt und der Krümmungsradius $\bar{\rho}$ meist aus der Länge einer Sehne s und der zugehörigen Höhe h des Bogens nach der Gleichung

$$\bar{\rho} = \frac{s^2}{8h} + \frac{h}{2} \quad (1)$$

berechnet, wobei der zweite Term gegenüber dem ersten bei flachen Bögen vernachlässigt werden kann. Zur Erhöhung der Meßgenauigkeit werden verschiedene Sehnenlagen gewählt und die zugehörigen Radien gemittelt.

Ein derart gemessener Radius stimmt aber im allgemeinen nicht mit dem Radius ρ_M überein, der allein durch die Ablenkung im Magnetfeld hervorgerufen wird (magnetischer Ablenkungsradius), denn jedes Teilchen wird an den Atomen des Nebelkammerfüllgases elastisch gestreut, d. h. bei jedem Stoß wird das Teilchen um einen kleinen Winkel aus seiner Bahn

abgelenkt. Die Ablenkungsrichtungen sind zwar statistisch verteilt, jedoch können zufällig längs eines kurzen Bahnstückes die wenigen größeren, makroskopisch aber noch nicht sichtbaren Ablenkungen nach derselben Seite erfolgen. Dann ist auch ohne Magnetfeld eine Bahnkrümmung beobachtbar, die ohne genaue Analyse von der Krümmung im Magnetfeld nicht zu unterscheiden ist. So zeigen z. B. die Spuren schwerer Teilchen in photographischen Emulsionen häufig eine Krümmung, die nur durch diese Vielfachstreuung verursacht wird¹⁾.

Die Größe der Streuwinkel und die Größe des durch die Streuung vorgetäuschten Krümmungsradius ρ_S (Streuradius) wird nach der Theorie²⁾³⁾⁴⁾ berechnet.

$$\langle \Theta^2 \rangle = \frac{4\pi (ze)^2 e^2 Z^2 N s}{p^2 v^2} \ln \frac{\Theta_{\max}}{\Theta_{\min}}, \quad (2)$$

$$\Theta_{\min} = \frac{mc}{p} \cdot \frac{Z^{1/3}}{181}, \quad (3)$$

$$\rho_S = s \sqrt{\frac{3}{4 \langle \Theta^2 \rangle}}. \quad (4)$$

$\langle \Theta^2 \rangle$... Summe der Quadrate der mittleren auf eine Ebene projizierten Streuwinkel, um die ein Teilchen mit dem Impuls p und der Geschwindigkeit v in einem Medium mit der Ordnungszahl Z auf einer Bahnlänge von s cm abgelenkt wird.

N ... Zahl der Atome in cm^3 der streuenden Substanz.

ze ... Ladung des Teilchens.

m ... Elektronenmasse.

Θ_{\max} ... größter Streuwinkel, der makroskopisch gerade noch nicht als Stoß erkannt werden kann und daher zur Krümmungsmessung mitverwendet wird.

Der mittlere quadratische Streuwinkel nimmt mit abnehmender kinetischer Energie des Teilchens zu. Bei Mesonen z. B. wird am Ende der Bahn die Verfälschung des magnetischen Ablenkungsradius durch Streuung so groß, daß verlässliche Massenbestimmungen aus Krümmung und Reichweite unmöglich sind.

Die Krümmung durch Streuung $\frac{1}{\rho_S}$ überlagert sich der Krümmung $\frac{1}{\rho_M}$ im Magnetfeld. Die nach Formel (1) ermittelte Krümmung

¹⁾ C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, C. F. Powell, Nature **159**, 1947, 694, Abb. 1.

²⁾ E. J. Williams, Phys. Rev. **58**, 292, 1940.

³⁾ B. Rossi, K. Greisen, Rev. of mod. Phys. **13**, 240, 1941.

⁴⁾ H. A. Bethe, Phys. Rev. **70**, 821, 1946.

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \text{ ist daher } \frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\rho_M} \pm \frac{1}{\rho_S}. \quad (5)$$

Der Streuradius kann nach (4) berechnet und die Abweichung $\Delta \bar{\rho}$ des gemessenen Radius $\bar{\rho}$ vom magnetischen Ablenkungsradius ρ_M in Prozenten angegeben werden. Diese Abschätzung der Abweichung wird bei den meisten in der Literatur veröffentlichten Krümmungsmessungen vorgenommen. Da aber die Streuung und daher auch der Streuradius statistischen Schwankungen unterliegt, dürfte dieser Streuradius nicht zur Fehlerbestimmung von Einzelbahnen verwendet werden. Diese Fehlerangabe ist daher sehr unsicher, denn der wahre Fehler kann kleiner sein, aber auch ein Vielfaches des angegebenen mittleren Fehlers betragen.

Methode zur Auffindung makroskopisch nicht erkennbarer Einzelstöße.

Die Bahn eines Teilchens im Magnetfeld kann folgendermaßen beschrieben werden: Wir nehmen an, daß nach Durchlaufen der Kreisbahn AB (siehe Abb. 1) das Teilchen durch

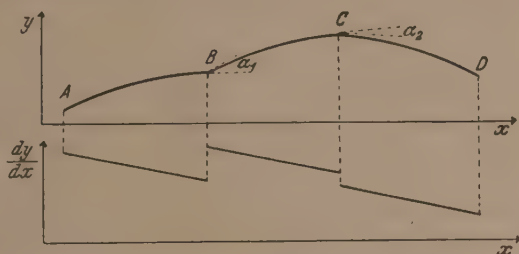


Abb. 1. Die Winkel wurden der Deutlichkeit halber übertrieben groß eingezeichnet.

einen elastischen Stoß um den Winkel α_1 aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Dann durchläuft das Partikel bis zum nächsten Stoß, der bei C erfolgen soll, wieder eine Kreisbahn mit gleichem Radius, vorausgesetzt, daß die Energieabgabe durch Ionisation entlang der Bahn und beim Stoß vernachlässigt werden kann. Das Bahnstück AC erscheint infolge des Stoßes makroskopisch schwächer (Aufbiegung), das Stück BD stärker (Zubiegung) gekrümmt als die Stücke AB und BC allein. Außer diesen großen, aber makroskopisch noch nicht sichtbaren Stößen wird das Teilchen längs AB , BC und CD noch zahlreiche kleinere Stöße erfahren, die aber zunächst nicht berücksichtigt werden, da sie den idealen Kreisbogen verhältnismäßig wenig verfälschen.

Die Tangentenkurve des Kreises $x^2 + y^2 = \rho^2$ hat die Gleichung $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$ oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\rho - h(x)}$, wobei $h(x)$ die Bogenhöhe über der durch $-x$ und $+x$ gelegten Sehne bedeutet. $h(x)$ kann bei Kreisbogen kleiner Höhe (ungefähr $< 0,03 \rho$) gegenüber ρ vernachlässigt werden. Die Tangentenkurve dieses Kreisbogens ist eine Gerade mit der Steilheit $\frac{1}{\rho}$.

Wird die Tangentenkurve der Bahn in Abb. 1 gezeichnet, entsprechen den Kreisbogen angenähert parallele Gerade, aus deren Neigung die Krümmung nach der bekannten genaueren Formel

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} \quad (6)$$

bestimmt werden kann. Die Unstetigkeitsstellen B und C erscheinen als Sprungstellen in der Tangentenkurve, aus deren Höhe die Streuwinkel berechnet werden.

Ermittlung von Krümmung und Stoßwinkel.

Vor Anwendung auf Mesonenbahnen wurde die soeben geschilderte Methode der Tangentenkurven an Elektronenbahnen ausprobiert, die mit einer langsamen Nebelkammer gewonnen und senkrecht zur Kammerebene photographiert waren. Die Kammer war mit Luft von ungefähr 0,5 atü gefüllt und befand sich in einem Magnetfeld von 1500 Gauß. Die auf dem Originalfilm 3—8 mm langen Bahnen (ca. $\frac{1}{10}$ der wahren Länge) wurden mit einem Meßmikroskop ausgemessen, indem in Abständen von 0,05 mm längs einer Bahnsehne die Höhe der beiden Bahnränder über der Sehne auf 0,001 mm genau ermittelt wurde. Die Bahnsehne wurde als Abszisse (Maßstab 100:1), die Höhe der Bahnmittelpunkte (Mittelpunkte der Bahnränder) als Ordinate (Maßstab 500:1 oder 1000:1) auf Millimeterpapier aufgetragen. Da die mit einer langsamen Kammer gewonnenen Bahnen vielfach diffuse Ränder und verhältnismäßig große Tröpfchen haben, mußten die streuenden Meßpunkte durch Schwerpunktsmittlung geglättet werden. Das Intervall der übergreifenden Mittelung wurde klein gehalten, um die Unstetigkeitsstellen der Bahn möglichst wenig zu verwischen. Zu jedem Punkt der gemittelten Kurve wurde das Verhältnis der Ordinaten- und Abszissendifferenz der beiden benachbarten Punkte gebildet und stark vergrößert als Tangentenkurve aufgetragen (5 cm entsprechen einem $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ von 0,1 oder 0,2). Um die Steilheit der Geraden objektiv zu bestimmen, wurde nach dem bekannten

Verfahren der Ausgleichsrechnung die beste Gerade durch jede Punktreihe gelegt. Die Punkte der Sprungstellen, die infolge der Mittelung verbreitert und geglättet erscheinen, wurden ausgelassen, da sie die Richtung der Geraden verfälschen. Nach Gleichung (6) wurden die Krümmungen $\frac{1}{\rho}$ aller Kreisbogenstücke berechnet und gemittelt. Der mittlere Fehler $\Delta\rho_{\text{exp}}$ des Mittelwertes ρ wurde in Prozenten angegeben.

Der Hauptvorteil der Methode der Tangentenkurve liegt gegenüber der alten Methode vor allem darin, daß alle größeren Stöße, die in der Bahnkurve selbst nicht erkannt werden, in der Tangentenkurve deutlich hervortreten und eliminiert werden können. Der aus ungestörten Bahnstücken berechnete Radius ρ weicht daher wesentlich weniger als $\bar{\rho}$ vom gesuchten magnetischen Ablenkungsradius ρ_M ab, und außerdem ist auch eine weitaus verlässlichere Fehlerangabe aus der Abweichung der einzelnen Radien vom Mittelwert möglich. Gestörte Teile der Bahn — z. B. infolge Verwirbelung oder durch eine querliegende alte Bahn — können in der Tangentenkurve ebenfalls festgestellt und bei der Krümmungsmessung ausgeschieden werden. Aber das neue Verfahren gestattet nicht nur eine genauere Ermittlung des magnetischen Ablenkungsradius, sondern bietet auch eine Möglichkeit, kleine Stoßwinkel auszumessen. Nach der Tangentenmethode können noch die Radien von Bögen mit einer wahren Höhe von 0,002 cm bestimmt werden. Die kleinsten noch erkennbaren Stoßwinkel betragen ca. 1° , bei sehr scharfen Bahnen sogar bis zu $30'$.

Die Genauigkeit des gemessenen Radius hängt in erster Linie von der Schärfe der Bahn ab. Je größer die Tröpfchen sind, desto stärker streuen die Punkte der Tangentenkurve und desto ungenauer sind die ermittelten Streuwinkel und die berechnete Krümmung. Bei kurzen und un-



Abb. 2.

scharfen Bahnen können durch mehrfache Mittelung die Sprungstellen derart verschliffen werden, daß eine Verwechslung von wahren Radius und Streuradius möglich ist. Zur Erläuterung ist in Abb. 2a die Tangentenkurve eines Kreisbogens dargestellt, der durch zwei Stöße aufgebogen wird. Wird die Bahnkurve oder deren Tangentenkurve mehrmals gemittelt, entsteht schließ-

lich die Tangentenkurve 2b. In diesem Fall ist zumeist sehr schwer zu unterscheiden, ob dem Geradenpaar geringer oder großer Steilheit die magnetische Ablenkung zugrunde liegt. Die Methode der Tangentenkurve versagt, wenn die Stöße in Abständen von ca. 5 mm natürlicher Größe aufeinanderfolgen. Infolge der zahlreichen Richtungsänderungen und Glättung der Sprungstellen wird dann eine Analyse der Tangentenkurve praktisch unmöglich.



Abb. 3 a.

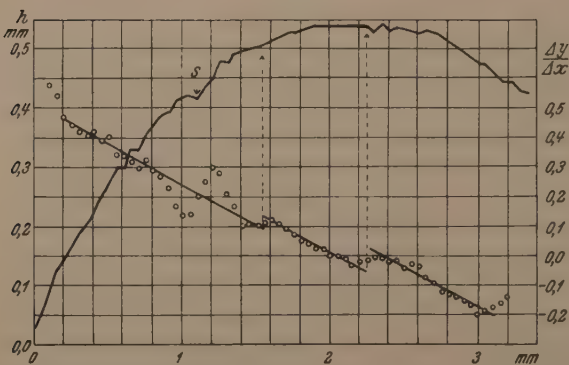


Abb. 3 b.

Bahn 1 zeigt zwei Stöße. Aus der Tangentenkurve ist ferner deutlich zu erkennen, daß bei *S* kein Stoß, sondern eine Störung vorliegt (wahrscheinlich infolge eines exzentrisch liegenden großen Tröpfchens). Durch die Mittelung wird die 0,2 mm lange Störstelle der Bahn auf 0,6 mm in der Tangentenkurve verbreitert. Weder die Aufbiegungen noch die Störung sind in der Originalkurve ersichtlich.

Meßbeispiele.

Aus einer Reihe von Messungen werden fünf Elektronenbahnen als Beispiele herausgegriffen. Die Aufnahmen sind in Abb. 3a—7a, die gemessenen Bahn- und Tangentenkurven in



Abb. 4 a.

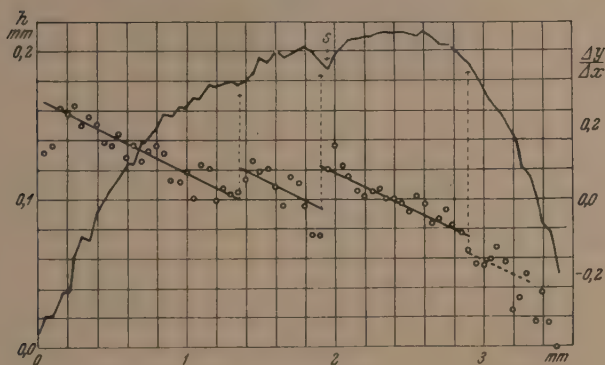


Abb. 4 b.

Bahn 2 zeigt in S außer einer Störung auch einen Stoß. Infolge der größeren Unschärfe der Bahn streuen die einzelnen Punkte der Tangentenkurve stärker als in Abb. 3.

Abb. 3b—7b wiedergegeben. Die einzelnen Punkte der Bahnkurven entsprechen den gemessenen Bahnmittelpunkten. Aus den nicht eingezeichneten, durch Schwerpunksglättung gewonnenen Kurven wurden die Punkte der Tangentenkurven berechnet und aufgezeichnet. Zwischen den Sprungstellen sind die besten Geraden durchgelegt. Die in den Bahnkurven selbst

nicht erkennbaren Stöße werden in der Tangentenkurve gut sichtbar.

In Tab. 1 sind die Meßergebnisse zusammengestellt. Die einzelnen Spalten enthalten:

Spalte 1: Nummer der Bahn.

„ 2: ρ , der aus den Tangentenkurven nach (6) gefundene und aus den einzelnen Bahnstücken gemittelte Radius, reduziert auf ein einheitliches Magnetfeld von 1500 Gauß.

„ 3: $\Delta\rho_{\text{exp}}$ mittlerer Fehler des Mittelwertes ρ .

„ 4: $\Delta\rho_{\text{th}}$ nach Formel (2), (3), (4), (5) berechneter Fehler von ρ , der durch Vielfachstreuung um Winkel kleiner als 1° zustande kommt. (Die Streuwinkel größer als 1° sind bereits eliminiert.)



Abb. 5 a.

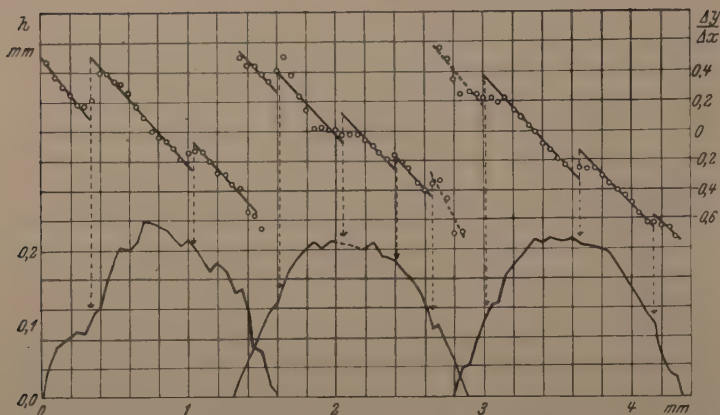


Abb. 5 b.

Die Bahn Nr. 3 eines energiearmen Elektrons mußte in fünf Teilen gemessen werden, drei Teile davon sind abgebildet. Das strichliert gezeichnete Bahnstück konnte nicht ausgemessen werden. Durch zahlreiche Stöße wird die Bahn ständig aufgebogen.



Abb. 6 a.

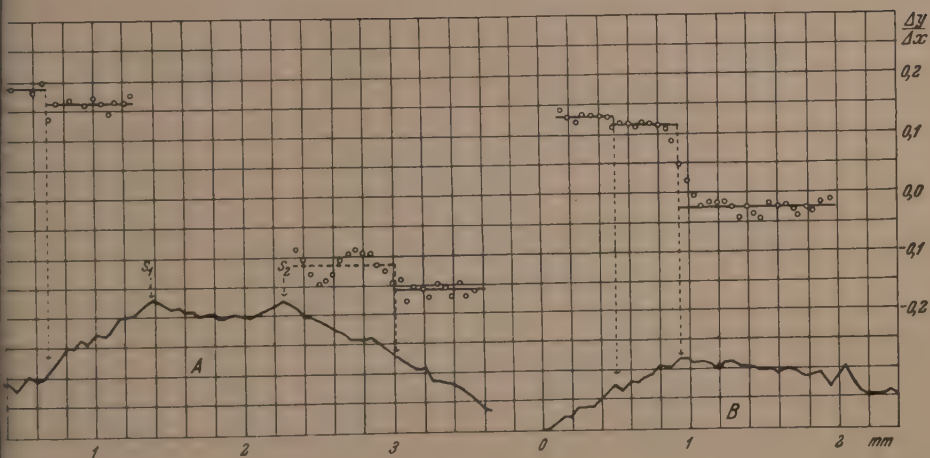


Abb. 6 b.

Die im Original stark gekrümmte Bahn Nr. 4 wurde in zwei Teilen (*A* und *B*) gemessen. Die Tangentenkurve zeigt, daß die Krümmung durch Zubiegungen vorgetäuscht wird. Der magnetische Ablenkungsradius ist größer oder gleich 36 cm, er kann aus den kurzen Bahnstücken nicht mehr genau ermittelt werden. Zwischen S_1 und S_2 ist die Bahn durch eine alte querliegende Elektronenbahn gestört. Der Stoßwinkel zwischen den beiden Bahnstücken *A* und *B* wurde gesondert bestimmt. Da der wahre Radius nicht bekannt ist, kann auch der experimentelle Wert von $\frac{\langle \theta^2 \rangle}{s}$ nicht genau angegeben werden ($1,5 \cdot 2,7 \cdot 10^{-2}$). Der theoretische Wert von $\frac{\langle \theta^2 \rangle}{s}$ ist für den Radius 36 cm berechnet.

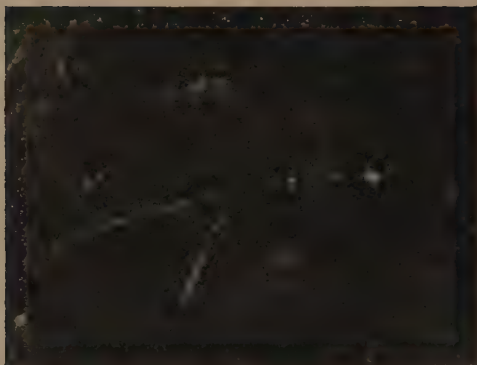


Abb. 7 a.

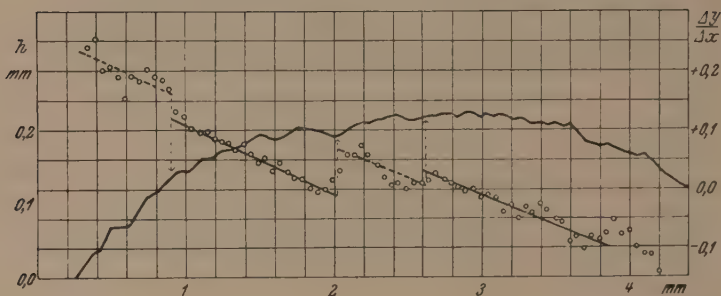


Abb. 7 b.

Bahn Nr. 5. Die strichlierten Teile der Tangentenkurve sind unsicher und wurden nicht zur Berechnung des Krümmungsradius mitverwendet.

- Spalte 5: $\bar{\rho}$ Radius, bestimmt aus Sehne und Bogenhöhe nach (1), reduziert auf ein Magnetfeld von 1500 Gauß.
- „ 6: $\Delta \bar{\rho}$ Fehler von $\bar{\rho}$ infolge Streuung um Winkel von Θ_{\min} bis Θ_{\max} (für unsere Berechnungen zu 15° angenommen), berechnet wie in Spalte 4.
- „ 7: Prozentuelle Abweichung des mittleren Radius $\bar{\rho}$ vom Radius ρ .
- „ 8: s Gesamtlänge der Bahn.
- „ 9: Summe der Quadrate der gemessenen Streuwinkel (Bogenmaß) pro cm. Der hier verwendete Wert von s ist gegenüber dem in Spalte 8 um die Hälfte der Länge des ersten und letzten Geradenstückes vermindert.
- „ 10: Summe der Quadrate der mittleren theoretischen Streuwinkel pro cm, berechnet nach der Formel (2) für $\Theta_{\min} = 1^\circ$ und $\Theta_{\max} = 15^\circ$.

Tabelle 1.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------|--------------|----------------------------|---------------------------|--------------|---------------------|----------|-----------|---|---|----------------------------|---|
| Bahn- Nummer | ρ cm | $\Delta \rho_{\text{exp}}$ | $\Delta \rho_{\text{th}}$ | ρ cm | $\Delta \bar{\rho}$ | Δ | s cm | $\lambda_1 = \frac{(\langle \sigma^2 \rangle)_{\text{exp}}}{s}$ | $\lambda_2 = \frac{(\langle \sigma^2 \rangle)_{\text{th}}}{s}$ | λ_1 λ_2 | Streuwinkel |
| 1 | 5,68 | 5% | 8% | 7,4 | 6% | 30% | 4,5 | 3,3 · 10 ⁻³ | 3,2 · 10 ⁻⁴ | 10 | + 3°, + 5° |
| 2 | 8,1 | 10% | 8% | 13,2 | 5% | 63% | 4,5 | 8,5 · 10 ⁻³ | 1,5 · 10 ⁻⁴ | 55 | + 5°, + 6° 30' |
| 3 | 1,24 | 4% | 3% | 1,70 | 4% | 37% | 13,0 | 6,0 · 10 ⁻² | 1,2 · 10 ⁻² | 5 | + 25°, + 13° 10', + 11° 20', + 7° 10', + 2°, + 10° 50', + 5°, + 5° 50', + 12° 10', + 10° 50', + 3° 20' |
| 4 | > 36 | — | — | 8,8 | 6% | 76% | 10,0 | 1,5 — 2,7 · 10 ⁻² | Elektron < 7,6 · 10 ⁻⁶ < 3,0 · 10 ⁻⁴ Meson | > 2000 > 50 | - 2°, - 15° 30', - 2° 30', - 15°, - 50', - 8° |
| 5 | 13,6 | 20% | 5% | 24,0 | 6% | 76% | 6,0 | 1,7 · 10 ⁻³ | 5,4 · 10 ⁻⁵ | 31 | + 30', + 1° 20', + 4° 40', - 2° 20' |

- Spalte 11: Quotient aus Spalte 9 und 10.
 „ 12: Zahlenwerte der aus der Tangentenkurve ermittelten Streuwinkel. Positives Vorzeichen bedeutet Aufbiegung, negatives Vorzeichen Zubiegung.

Diskussion der Ergebnisse.

Der in Spalte 4 angegebene Fehler des Radius ist abgesehen von Bahn Nr. 1 kleiner als der experimentell aus den Abweichungen der einzelnen Radien vom Mittelwert berechnete Fehler in Spalte 3, der außer der Streuung auch noch Meßfehler enthält. Die Fehlerangabe von ρ stimmt daher experimentell und theoretisch gut überein.

Bei Betrachtung der Tabelle fällt sofort die große Abweichung des mittleren Radius $\bar{\rho}$ vom Radius ρ auf. Man sollte erwarten, daß die beiden Werte nur innerhalb der angegebenen Fehlergrenzen $\Delta \rho_{\text{exp}}$ und $\Delta \rho$, d. h. um rund 5—10% voneinander abweichen. Hingegen beträgt der experimentell gefundene Fehler (Spalte 7) rund 50%. Dieser große Unterschied läßt sich nur dadurch erklären, daß die Streuwinkel wesentlich größer und daher der Streuradius viel kleiner ist, als nach der Theorie angenommen wird. Nach Spalte 11 ist das experimentell bestimmte $\frac{(-)^2}{s}$ (Spalte 9) auch tatsächlich 5—50mal größer als

der theoretische Wert (Spalte 10). Kommt es auf größtmögliche Genauigkeit bei der Krümmungsmessung an, ist das Verfahren der Tangentenkurve, trotzdem es wesentlich mühsamer ist, dem bisher verwendeten Verfahren vorzuziehen.

Trotz der größeren Streuwinkel wäre eine derart große Abweichung zwischen ρ und $\bar{\rho}$ nicht möglich, wenn Auf- und Zubiegungen gleich häufig wären. Wie jedoch die Abb. 3b—7b und Spalte 12 zeigen, findet die Streuung mehrmals hintereinander nach derselben Richtung statt. Besonders auffallend ist diese Erscheinung bei Bahn Nr. 3, die durch 11 Streuwinkel stets aufgebogen wird. Ob dieser Effekt zufällig zustande kommt oder gesetzmäßig verläuft, läßt sich auf Grund des wenigen ausgewerteten Materials natürlich nicht feststellen. Daß die Streuung bei allen fünf Bahnen systematisch nach der gleichen Seite erfolgt, läßt sich eventuell dadurch erklären, daß bei der Sortierung der Aufnahmen nur makroskopisch gleichmäßig gekrümmte Bahnen ausgewählt wurden.

Ein Beispiel für die Leistungsfähigkeit der Methode ist Bahn 4, die bei einem magnetischen Ablenkungsradius von mehr als 36 cm infolge von sechs Zubiegungen einen Radius $\bar{\rho}$ von nur 8,8 cm besitzt. Nach Spalte 11 ist das Verhältnis der quadratischen Streuwinkel pro Längeneinheit > 2000 , wenn es sich um ein Elektron, > 50 , wenn es sich um ein Meson handelt.

Die Abweichung zwischen experimentellen und theoretischen quadratischen Streuwinkeln (Spalte 11) scheint mit wachsender Energie der Elektronen zuzunehmen. Eine sichere Aussage ist jedoch erst nach Ausmessung einer größeren Anzahl von Bahnen möglich.

Der mittlere Streuwinkel pro Längeneinheit kann als zusätzliches Bestimmungsstück neben Krümmung, Ionisation und Reichweite zur Energie- und Massenbestimmung von Teilchen herangezogen werden, sobald der gesetzmäßige Zusammenhang zwischen Streuwinkel und Energie für Elektronen, Mesonen und Protonen experimentell gesichert ist.

Zusammenfassung.

Es wird ein neues Verfahren zur Bestimmung des Krümmungsradius von Nebelkammerbahns Spuren angegeben, bei dem Stöße um Winkel größer als 10° , die das Teilchen im Kammergas erfährt, erkannt und für die Krümmungsmessung ausgeschieden werden. Die Größe der Stoßwinkel kann ermittelt werden. An fünf mit einer langsamen Nebelkammer aufgenommenen Bahnen wird das Verfahren eingehend besprochen. Es wird ferner gezeigt, daß die aus den gemessenen Streuwinkeln berechnete Summe der Quadrate der Streuwinkel pro Längeneinheit um einen Faktor 5—50 größer ist als die nach der Theorie berechnete.

Ferromagnetische Wechselwirkungen in Manganlegierungen.

Von

L. Castelliz und F. Halla, Wien.

Mit 5 Abbildungen.

(Eingelangt am 3. April 1948.)

1. Ergebnisse früherer Arbeiten an Nickel, Kobalt und Eisen; Folgerungen für Mangan.

Sadron[1] und andere Forscher der Straßburger Schule (Fallot, Marian) untersuchten die Sättigungsmagnetisierungen von binären Legierungen der Übergangselemente. Sie gingen dabei von Nickel, Kobalt und Eisen als Lösungsmittel („Grundmetall“) aus und lösten in diesen der Reihe nach andere Übergangsmetalle („Fremdmetalle“).

Diese Lösung erfolgt entweder mit paralleler oder antiparalleler Spineinstellung zu den Spinmomenten des Lösungsmittels. Trägt man die Atommomente eines binären Systems als Funktion der Konzentration auf, so ergibt sich aus der Anfangsneigung — solange also die Lösung bezüglich der gelösten Komponente soweit verdünnt ist, daß ihre Spinmomente untereinander noch nicht in Wechselwirkung treten können — das atomare Moment, mit dem die eine Komponente beim Auflösen in der anderen erscheint. In Abb. 1 z. B. (System Fe-Co) liefert der Schnittpunkt der Anfangstangente (bevor die Kurve in die Krümmung einmündet, die dem Abfall zum

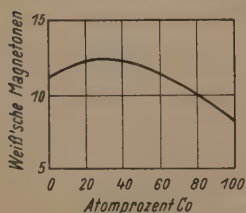


Abb. 1. System Fe-Co. Atommomente in Weiß'schen Magnetonen. Aus U. Dohlinger, Z. Metallkunde, 28, 1936.

Wert für reines Co vorausgeht) mit der Co-Ordinate das Moment in Weiß'schen Magnetonen, mit denen sich die Co-Atome in das Fe-Gitter einstellen.

Auwers[2] stellt die von obigen Autoren gemessenen atomaren Momentwerte zusammenfassend dar als Funktion der Zahl der Außenelektronen der gelösten Metalle, wobei die Zahl der Außenelektronen der Grundmetalle als Parameterwerte der

einzelnen Kurven erscheinen. Abb. 2 gibt einen Ausschnitt aus der *Auwersschen* Darstellung, der auf die Übergangselemente mit unabgeschlossener 3d-Schale beschränkt ist¹⁾. Dabei bedeuten positive Magnetonenwerte, daß das eingelagerte Atom seine Spinnomente parallel zu denen des Lösungsmittels stellt, also mit diesem in ferromagnetische Wechselwirkung tritt, negative Magnetonenwerte entsprechen antiferromagnetischer Wechselwirkung.

Die der Abb. 2 zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Jede Kurve durchläuft ein Maximum und dieses verschiebt sich für das gelöste Metall um 1 Elektron nach rechts, wenn die Zahl der Außenelektronen des Lösungsmittels um 1 abnimmt. Das Maximum liegt also bei einem konstanten Wert der Elektronensumme aus Lösungsmetall und gelöstem Metall, nämlich bei dem Wert 17. Ebenso, wenn auch nicht um ein ganzes Elektron, verschiebt sich der Schnittpunkt der Kurven mit der Abszisse, d. h. der Umschlag von positivem zu negativem Austausch vollzieht sich ebenfalls bei einem ungefähr konstanten Wert der Elektronensumme. *Auwers* formuliert diese Zusammenhänge als eine den *Hund'schen* Regeln entsprechende Gesetzmäßigkeit, nach der sich in diesen Zweikomponentensystemen die Verteilung von paralleler und antiparalleler Spinstellung vollzieht. Paralleler Einbau ist nur bis zu einem bestimmten Höchstwert der resultierenden Momente möglich, ist die Gesamtzahl größer, erfolgt antiparalleler Einbau.

Wir haben uns nun die Aufgabe gestellt, zu untersuchen, ob sich diese empirische Gesetzmäßigkeit auch auf Mangan als Lösungsmittel ausdehnen läßt. Es müßte dann der Höchstwert der positiven Wechselwirkung bei Nickel als Einbaumetall liegen und der Umschlag nach negativer Wechselwirkung sich gegenüber der Eisenkurve abermals nach rechts verschieben.

Dabei bestand aber zunächst die Schwierigkeit, daß in reinem Mangan die Atome in antiferromagnetischer Wechselwirkung stehen und damit die Frage, ob die gelösten Atome

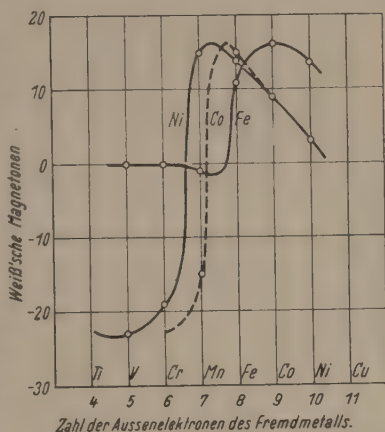


Abb. 2. Atommomente in Weißschen Magnetonen.

¹⁾ Für Ni, bei welchem die Meßwerte von *Sadron* und *Marian* etwas auseinandergehen, sind nur die ersteren eingezeichnet.

ihre Spinmomente parallel oder antiparallel zum lösenden Gitter stellen, gegenstandslos wird. Wir sind deshalb von einer ferromagnetischen Mn-Legierung ausgegangen, bei der aber das Mn allein die Momentträger liefert, nämlich von der ϵ -Phase des Mn-Sb-Systems.

2. Herstellung der Legierungen.

Die einzelnen Komponenten waren folgender Herkunft, bzw. Darstellung:

| | |
|-------------------|--|
| Antimon | Schering-Kahlbaum |
| Mangan | Manganese Co of America, vakuumdestilliert |
| Kobalt | Schering-Kahlbaum |
| Nickel | " " |
| Eisen | Merck, pro analysi |
| Kupfer | " per elektrolysem pulv. |
| Chrom | Unbekannter Herkunft (Thermit-Chrom) |
| Titan | " " |

Die Legierungen wurden hergestellt durch Zusammenschmelzen der (mit Ausnahme von Co und Ni) fein gepulverten und sorgfältig gemischten Komponenten im gereinigten Wasserstoffstrom bei 1160°. Zur vollständigen Homogenisierung wurden sie während des Abkühlens einige Stunden auf 800° gehalten. Die einzelnen Proben erwiesen sich bei röntgenographischer Untersuchung als homogen, mit gleichen Werten der Gitterkonstanten in verschiedenen Probeteilen. Die Ausgangslegierung aus dem Homogenitätsbereich der ϵ -Phase hatte die Zusammensetzung $\text{Mn}_{1,35}\text{Sb}$ mit den Gitterkonstanten $a = 4,21 \text{ \AA}$, $c = 5,72 \text{ \AA}$. In den ternären Legierungen war Mn ersetzt durch Cu, Ni, Co, Fe, Cr, Ti, und zwar bis maximal 9 At% in Abständen von 1,5 At%. Es wurden also Legierungen untersucht im Bereiche:

| | At% Mn | At% Me | At% Sb |
|-----|--------|--------|--------|
| von | 57,5 | 0 | 42,5 |
| bis | 48,5 | 9 | 42,5 |

Die ternären Röntgendiagramme zeigten keine neuen Linien, die Phase blieb also homogen. Die Gitterkonstanten änderten sich innerhalb der Grenzen von $a = 4,15 \text{ \AA}$ (für Cu) bis $a = 4,22 \text{ \AA}$ (für Ti) und von $c = 5,65 \text{ \AA}$ (für Fe) bis $c = 5,76 \text{ \AA}$ (für Ti).

3. Meßmethode.

Die Magnetisierungen wurden gemessen bei Feldstärken von maximal 1300 Oe mittels einer von B. H. Schultz [3] entwickelten Fluxmetermethode. Das Fluxmeter besteht im wesentlichen aus einer Drehschule mit zwei im Abstand von 22 mm

aufgebrachten Wicklungen zu je 213 Windungen, welche sich im homogenen Feld eines Elektromagneten befinden. Werden beide Wicklungen im entgegengesetzten Sinn vom gleichen Strom durchflossen, so ist das resultierende Drehmoment Null. Sobald in eine der beiden Wicklungen eine kleine Kugel mit einer magnetisierbaren Substanz eingebracht wird, übt diese auf die Spule ein der Magnetisierung proportionales Drehmoment aus, das mittels Spiegelablesung beobachtet wird. Das Drehmoment wird aufgehoben durch einen Shunt R parallel zur betreffenden Spulenwicklung, welcher den ursprünglichen Strom i dieser Wicklung auf i_1 herabsetzt; bei dieser Nullpunkt-methode bleiben Stromschwankungen und Skalenfehler ohne Einfluß.

Aus der Gleichsetzung der beiden auf das System wirkenden Drehmomente ($D_1 = c \cdot M \cdot i_1$ bedeutet das durch das Feld der Probe, $D_2 = k \cdot H \cdot (i - i_1)$ das durch die Differenz der beiden Spulenströme erzeugte Drehmoment) und dem Stromverzweigungssatz $\frac{i - i_1}{i_1} = \frac{r_1}{R}$ (wobei r_1 der Widerstand der die Probe enthaltenden Spule ist) ergibt sich für die Magnetisierung der Substanz $M = \frac{k}{c} \cdot \frac{r_1}{R} H$, wobei k und c Apparaturkonstante bedeuten.

Die Probe wurde nacheinander in beide Wicklungen gebracht und immer genau auf Spulenmitte eingestellt (maximaler Ausschlag bei gleichen Spulenströmen). Die beiden Shuntwerte ergaben nur geringe Differenzen und wurden gemittelt.

Das Feld des Elektromagneten wurde mit Hilfe einer kleinen Probespule ballistisch ausgemessen, die Eichung der Apparatur, d. h. die Bestimmung der Größe $\frac{k}{c}$ erfolgte mittels MnSO_4 wasserfrei als Eichsubstanz ($\chi_k = 94 \cdot 10^{-6}$) [3].

Da uns nur ein kleiner *Lange*-Magnet zur Verfügung stand, der bei dem vorgegebenen Interferrikum maximal 1300 Oe lieferte, erreichten wir keine Sättigungsfeldstärken, sondern befanden uns bei allen Proben noch auf dem fast linear ansteigenden Ast der Magnetisierungskurve. Wir konnten deshalb auch keine atomaren Momente berechnen, sondern mußten uns auf einen Vergleich der gemessenen Suszeptibilitäten beschränken.

4. Experimentelle Ergebnisse.

Tab. 1 und Abb. 3 geben die gemessenen Suszeptibilitäten der ternären Legierungen in Abhängigkeit vom Molenbruch (At^0_0) des gelösten Metalls. Sie beziehen sich auf scheinbare Feldstärkenwerte, da der Entmagnetisierungsfaktor der pulver-

förmigen Proben nicht mit genügender Sicherheit bestimmt werden konnte. Er ist aber innerhalb der Meßgenauigkeit als

Tabelle 1: χ_g der ternären Legierungen für $H = 1000$ Oe.

| At% | Mn | Ti ²⁾ | Cr | Fe | Co | Ni | Cu |
|---------------------|------|------------------|------|------|------|------|------|
| 0,0 Me (57,5 Mn) | 1,67 | 1,67 | 1,67 | 1,67 | 1,67 | 1,67 | 1,67 |
| 1,5 | — | 1,69 | 1,69 | 1,63 | 1,60 | 1,82 | 1,72 |
| 3,0 | — | — | 1,70 | 1,56 | 1,60 | 2,01 | 1,78 |
| 4,5 | — | — | 1,71 | 1,42 | 1,70 | 2,21 | 1,88 |
| 6,0 | — | — | 1,71 | 1,09 | 1,85 | 2,58 | 2,03 |
| 7,5 | — | — | — | — | — | — | — |
| 9,0 | — | — | 1,72 | 0,40 | 2,25 | 3,64 | 2,70 |

gleich anzunehmen für alle Legierungen, da diese in genau gleicher Weise gepulvert und gesiebt worden waren. Verschiedene Füllungen mit ein und derselben Probe ergaben Abweichungen in den Meßwerten von maximal 1%. Dieser Unterschied ist der durch die verschiedene Lage der Pulverkörner bedingten Änderung des Entmagnetisierungsfaktors zuzuschreiben und definiert hiemit die Grenzen der Meßgenauigkeit.

Die auf effektive Feldstärken bezogenen Suszeptibilitäten berechnen sich aus den „scheinbaren“ durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{1}{1 - N\chi}$ (Entmagnetisierungsfaktor N), verlaufen also steiler als diese.

In Abb. 4 sind nun die Anfangswerte der Kurven Abb. 3 (für 1,5 At% Fremdmittel) als Funktion der Zahl der Außenelektronen des Fremdmittels aufgetragen. Wenn

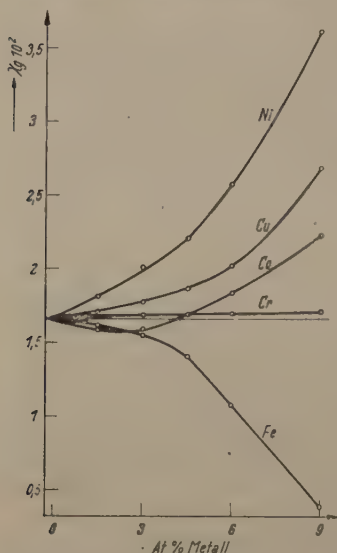


Abb. 3. Grammsuszeptibilitäten der ternären Mn-Sb-Legierungen für $H = 1000$ Oe.

²⁾ Die höheren Titankonzentrationen ergeben — vermutlich wegen Unreinheit des Metalls — keine reproduzierbaren χ -Werte.

wir diese Kurve den *Auwersschen* Kurven Abb. 2 gegenüberstellen, müssen wir uns natürlich bewußt bleiben, daß es sich nur um einen qualitativen Vergleich bezüglich des Ganges des Ferromagnetismus handeln kann, da wir hier Suszeptibilitäten atomaren Momenten gegenüberstellen³⁾. Das Maximum der Kurve repräsentiert aber auch hier — wie bei der Atommomentkurve — das Maximum der positiven Austauschwirkung der Momentträger, der steile Durchgang durch den Ordinatenwert der binären Manganlegierung (Wechselwirkung Mn—Mn) kann als Kriterium für den Umschlag von positiver zu negativer Wechselwirkung angesehen werden.

Wir finden also, daß der Höchstwert der ferromagnetischen Wechselwirkung nun tatsächlich — wie wir nach den Ausführungen im Abschnitt 1 zu erwarten hatten — bei Ni liegt und daß der antiferromagnetische Umschlag sich ebenfalls nach rechts zwischen Co und Ni verschoben hat. Es schließt sich damit die Mn-Kurve an die Fe-Kurve an.

Es wäre nun noch zu untersuchen, wieweit es bei diesen ternären Legierungen zulässig ist, den Verlauf des Ferromagnetismus allein der Wechselwirkung der Übergangselemente zuzuschreiben. Wohl haben wir heute noch kein klares Bild über den Anteil des Metalloids an dem Ferromagnetismus der Ni-As-Phasen überhaupt und wir wissen nicht, ob dem Sb z. B. in der ϵ -Phase des Systems Mn-Sb tatsächlich nur die geometrische Rolle der Aufweitung des Mn-Gitters zukommt. Doch spricht der Verlauf der Cr- und ganz besonders der Cu-Kurve gegen die Annahme, daß hier Wechselwirkungen der genannten Metalle mit Sb zum Ausdruck kommen. Denn Cu kann mit Sb keine ferromagnetische Verbindung bilden, und wenn auch im Mn-Cu-System kein Ferromagnetismus festgestellt worden ist, so haben wir beim Einlegieren von Cu in das durch Sb ferromagnetisch gemachte Mn Verhältnisse vor uns, die noch nicht untersucht worden sind, die aber eine positive Austauschwirkung zwischen Cu und Mn sehr wahrscheinlich machen. Die Beschreibung eines Mechanismus, der

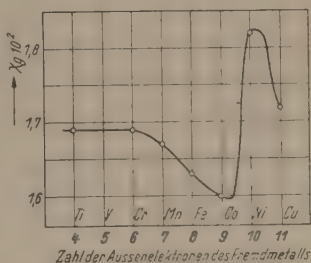


Abb. 4. Gamm'sche Suszeptibilitäten der ternären Mn-Sb-Legierungen mit 1,5 At% Fremdmetall. $H = 1000$ Oe.

³⁾ Eine Kurve der „effektiven Suszeptibilitäten“ würde diesen Gang des Ferromagnetismus noch ausgeprägter zeigen, da der Faktor $\frac{1}{1 - N\chi}$ $\frac{1}{1 - N(\chi_0 + \Delta\chi)}$ größer wird für größere $\Delta\chi$ -Werte.

die Erscheinungen möglich macht, soll aber im Rahmen dieser experimentellen Arbeit nicht versucht werden.

Als empirisches Ergebnis der vorliegenden Untersuchungen können wir also folgendes festlegen: Es gilt auch für Mn als Lösungsmittel die gleiche qualitative Gesetzmäßigkeit bezüglich des Verlaufes des Ferromagnetismus beim Einbau von Übergangselementen wie für Ni, Co und Fe als Grundmetall. Der parallele Einbau der Spinnmomente erreicht seinen größtmöglichen Wert beim Wert 17 der Elektronensumme von Lösungsmetall und gelöstem Metall. Diesem Maximum geht unmittelbar der den scharfen Umschlag zwischen antiparallelem und parallelem Spineinbau charakterisierende Wendepunkt der Kurve voraus. Dieser verschiebt sich damit gegenüber der Fe-Kurve nach rechts, so wie er sich bei Kobalt gegenüber Ni und bei Fe gegenüber Co nach rechts verschoben hat.

5. Der Verlauf des Ferromagnetismus innerhalb der ϵ -Phase des Mn-Sb-Systems.

Im Zusammenhang mit den oben beschriebenen Arbeiten haben wir die magnetischen Verhältnisse innerhalb der B 8-Phase des Mn-Sb-Systems einer eingehenden Untersuchung unterzogen.

Da eine genaue Kenntnis der Phasengrenzen hierzu Voraussetzung war, die Resultate früherer Strukturuntersuchungen [4], [5] aber beträchtlich auseinandergehen, wurde das System von uns röntgenographisch und mit Hilfe von Schlicfbildern untersucht und folgendes festgestellt: Außer der tetragonalen Mn_2Sb -Phase existiert — im Gegensatz zu den Ergebnissen von *Murakami* u. *Hatta* — nur eine Phase mit Ni-As-Struktur, die zwischen 53,3 und 57,9 At% Mn homogen gefunden wurde. Die Phase liegt also zwischen den Zusammensetzungen Mn-Sb und Mn_3Sb_2 , erreicht diese aber an keiner der beiden Grenzen.

Abb. 5 zeigt die Suszeptibilitäts-Konzentrationskurven⁴⁾ innerhalb und um die ϵ -Phase für drei verschiedene Feldstärkenwerte. Wir finden einen schwachen Anstieg mit abnehmender Mn-Konzentration bis an die obere Grenze des Homogenitätsbereiches, dann einen steilen Anstieg innerhalb derselben und ein ausgeprägtes Maximum an der Mn-armen Grenze bei 53,3 At% Mn. Über den gleichen Anstieg des Ferromagnetismus innerhalb der homogenen Phase berichten *Honda* und *Ishiwara* [6], nur liegt bei ihnen die Mn-arme Grenze und damit das Maximum der Magnetisierung bei 50,4 At% Mn.

Bezüglich des Ganges des Ferromagnetismus ergibt sich also — worauf wir in einer früheren Arbeit [7], als wir die ma-

⁴⁾ Wir geben auch hier wieder die auf scheinbare Feldstärkenwerte bezogenen Suszeptibilitäten an.

gnetischen Verhältnisse in den Einlagerungs- und Subtraktionsgittern der Ni-As-Phasen einander gegenüberstellen, bereits hingewiesen haben — folgendes:

In den ferromagnetischen B 8-Phasen nimmt der Ferromagnetismus zu mit abnehmendem Metallgehalt bis zu einem Höchstwert an der metallarmen Grenze des Homogenitätsbereiches. Er bildet also seinen maximalen Wert dort aus, wo das Gitter (und zwar sowohl Defekt- als Einlagerungsgitter hinsichtlich des Metalls) mit einer minimalen Besetzung mit Metallatomen noch aufrechtgehalten wird.

Zusammenfassung.

Von ternären Phasen, die durch Einbau der Übergangselemente Ti bis Cu in die ferromagnetische ϵ -Phase des Systems Mn-Sb entstehen, wurden die Suszeptibilitäten gemessen. Diese werden den von Sadron und Marian an Nickel, Kobalt und Eisen gemessenen Atommomenten gegenübergestellt. Ein qualitativer Vergleich zeigt, daß der Verschiebung der Mn-Kurve gegenüber der Fe-Kurve die gleiche Gesetzmäßigkeit zugrunde liegt, wie sie in der Verschiebung der Fe- gegenüber der Co-Kurve und der Co- gegenüber der Ni-Kurve zum Ausdruck kommt.

Die ϵ -Phase des Mn-Sb-Systems wurde durch Strukturuntersuchungen genau abgegrenzt und magnetisch untersucht.

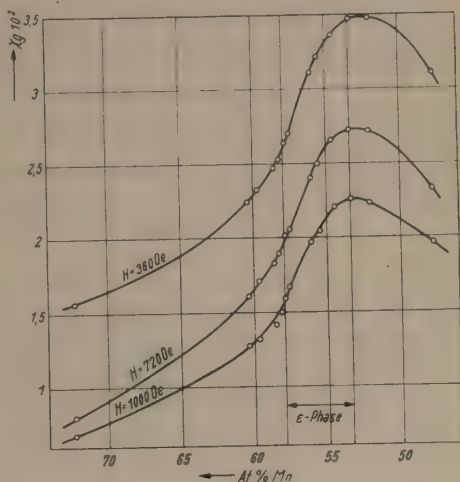


Abb. 5. Suszeptibilitätsverlauf in der Umgebung der ϵ -Phase des Systems Mn-Sb bei verschiedenen Feldstärken.

Literatur.

- [1] Ch. Sadron, Annales de Physique, Tome XVII, Mai-Juin 1932.
- [2] O. v. Auwers, Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus den Siemens-Werken, Band XVI, Heft 2.
- [3] B. H. Schultz, Over abnormale magnetische eigenschappen van enkele zouten behoorende tot de ijzergroup. Haarlem 1940.
- [4] Williams, Z. Anorganische allgemeine Chemie **55**, 1907.
- [5] T. Murakami and A. Hatta, Sc. Rep. Tohoku Univ. (1) **22**, 1933.
- [6] Honda and Ishiwari, Sc. Rep. Tohoku Univ. **5**, 1916.
- [7] L. Castelliz und F. Halla, Zeitschrift für Metallkunde **11**, Nov. 1943.

Die empirischen Unterlagen der Theorie der Sternentstehung.

Von

P. Jordan, Hamburg.

(Eingelangt am 14. Juli 1948.)

1. Einleitung.

Die letzten Jahre haben uns eine Reihe von Tatsachen bekannt werden lassen, welche in *jedem* Versuch einer Theorie der Sternentstehung sorgfältig berücksichtigt werden müssen. Die nachfolgenden Ausführungen zielen darauf ab, die in diesem Sinne bedeutungsvollen empirischen Tatsachen zu sammeln und sie einer gewissen vorläufigen Prüfung auf ihre Bedeutung zu unterziehen. Dabei soll von einer Erörterung weiter gehender theoretischer Deutungsversuche ganz abgesehen werden — nur die unmittelbar und anscheinend unausweichlich aus den fraglichen Tatsachen sich ergebenden Folgerungen sollen besprochen werden. Auch die vom Verfasser vor etwa zehn Jahren begründete und seither in verschiedenen Arbeiten näher ausgeführte Theorie¹⁾ soll nur insoweit berührt werden, als sich aus den empirischen Unterlagen heraus unmittelbare Bestätigungen für bestimmte Einzelpunkte jener Theorie ergeben.

Grundlegende Fortschritte unseres empirischen Wissens sehen wir vor allem erzielt durch Unterscheidung der beiden Sternpopulationen I und II und beginnende Klärung ihrer Beziehungen zueinander und zu den diffusen Massen der Spiralnebel; vor allem durch die von *Baade* erreichte Auflösung der angeblich „unaufgelösten“ Spiralnebel, bzw. Spiralnebelteile im lokalen System²⁾. Die Arbeiten von *Babcock* haben andererseits für die quantitative Beurteilung eines Spiralnebels erheblich verbesserte Unterlagen geschaffen. Ferner sind die drei historischen galaktischen Supernovae jetzt durch *Baade* und *Minkowski* so eingehend erforscht, daß der Spielraum diesbezüglicher Hypothesenbildung sehr erheblich eingeschränkt worden ist.

¹⁾ Ann. d. Phys. **36**, 64 (1939). Die Herkunft der Sterne. Stuttgart 1947. Astronom. Nachr. (im Erscheinen). *G. Ludwig* und *Cl. Müller*, Ann. d. Phys. **2**, 76 (1948).

²⁾ *W. Baade*, Astroph. J. **100**, 137 (1944).

Drittens ist die Erörterung der Frage nach der Herkunft der Höhenstrahlung durch die Ergebnisse von *Ehmer* und *Forbusch* in ein neues Stadium getreten.

Andererseits sind auch durch Fortschritte der theoretischen Untersuchung einige für die Kosmologie wesentliche Fragen einer besser begründeten Beurteilung zugänglich geworden. Durch *v. Weizsäcker* ist nicht nur für die Entstehung des Planetensystems eine sehr einleuchtende Erklärung ausgearbeitet worden, sondern außerdem auch der Entwicklungsgang der Spiralnebel weitgehend verständlich geworden in dem Sinne, daß eine Umkehrung des bislang zumeist angenommenen, insbesondere von *Jans* vertretenen Entwicklungsgangs zu denken ist: Die unregelmäßigen Nebel sind nicht als späte, sondern im Gegenteil als frühe Entwicklungsstadien anzusehen, aus denen sich Spiralformen erst nachträglich entwickeln, welche sich zuletzt zu elliptischen oder kugelförmigen Nebeln beruhigen. Ebenso sind die Kugelhafen nicht etwa als Jugendformen, sondern im Gegenteil als Beruhigungsformen zu betrachten³⁾.

Die *Weizsäckersche* Theorie der Planetenentstehung⁴⁾ macht wahrscheinlich, daß die Planeten sich gebildet haben aus Materie, welche die Sonne einstmals als flache, rotierende Linse umgeben hat. Diese Theorie begünstigt scheinbar die traditionelle Vorstellung, daß Sterne aus anfänglich zerstreuter Materie durch gravitationsbedingte Zusammenballung entstehen. Tatsächlich aber liegt kein logischer Zwang vor, die für Planeten wahrscheinlich gemachte Entstehungsweise auch bei den Sternen vorauszusetzen; die fragliche linsenförmige Materieansammlung braucht nicht ein Restbestand von einer durch Kondensation bedingten Entstehung der Sonne zu sein, sondern kann ebensowohl als Ergebnis einer äquatorialen Materieabschleuderung durch die anderweitig entstandene Sonne gedeutet werden, ohne daß damit die sonstigen Gedankengänge der *Weizsäckerschen* Theorie beeinträchtigt werden.

Ein anderes Ergebnis theoretischer Untersuchung ist die vom Verfasser ausgeführte Korrektur einer unzutreffenden Folgerung, welche *Chandrasekhar* aus seiner bewunderungswürdigen Theorie der entarteten Sterne gezogen hatte (eine Folgerung, welche *Eddington* in richtiger Erkenntnis ihrer Unmöglichkeit durch eine willkürliche und unhaltbare Abänderung der relativistischen Mechanik zu beseitigen gesucht hatte). Ein aus He bestehender Stern, dessen Masse 1,44 Sonnenmassen überschreitet, sollte nach *Chandrasekhar* außerstande sein, sich bis zur Entartung abzukühlen, ohne vorher seine Masse durch explosive Abstoßung auf $\leq 1,44$ Sonnenmassen vermindert zu haben. Tat-

³⁾ C. F. v. Weizsäcker, Z. Astroph. **24**, 181 (1947).

⁴⁾ Ebenda **22**, 319 (1944).

sächlich steht seiner Abkühlung und Entartung nichts im Wege; im Innern des He-Sterns mit $> 1,44$ Sonnenmassen bildet sich ein Kern von Neutronenmaterie aus⁵⁾.

Damit wird einerseits die *Chandrasekharsche* Deutung der planetarischen Nebel und der Supernovae ausgeschieden. Andererseits wird mindestens für das Beispiel der entarteten Sterne endgültig klargestellt, daß die stationäre, stabile Existenz von Sternen beliebig großer Masse physikalisch möglich wäre. Sofern dies auch für nicht entartete Sterne zutrifft (und keinerlei einwandfreier Beweis spricht hiergegen), so bedeutet es, daß einer Theorie der Sternentstehung auch die Aufgabe zufällt, zu erklären, warum die beobachteten Sterne eine so deutlich ausgeprägte *obere Massengrenze* besitzen. Diese Frage hat außer der vom Verfasser vorgeschlagenen bislang noch keine andere Theorie der Sternentstehung zu beantworten versucht.

Endlich ist das Problem der Entstehung der chemischen Elemente durch theoretische Untersuchungen neuerdings gefördert worden, insbesondere in Arbeiten von *Klein, Beskow* und *Treffenberg*⁶⁾. Die erzielten Ergebnisse begünstigten die — auch von *Unsöld* als berechtigt erwiesene — Vorstellung, daß der Elementaufbau vor sich gegangen ist in sehr dichter (und sehr heißer) Materie (bis annähernd Kerndichte), und zwar nicht in einer hypothetischen urzeitlichen Zusammenhäufung aller heute vorhandenen Materie, sondern in materiellen Gebilden von der *Größenordnung von Einzelsternen*. Nach diesen tiefdringenden Untersuchungen träte also das Problem der Elemententstehung in unmittelbare Beziehung zum Problem der Sternentstehung, und zwar in einer Weise, welche der vom Verfasser vorgeschlagenen Theorie engstens entspricht.

2. Spiralnebel und Sternpopulationen.

Die zuerst in den *Kugelhaufen* gefundene, zum größten Teil aus roten Zwergen bestehende Population II setzt außerdem nicht nur die elliptischen Nebel sowie die früher als „unaufgelöst“ bezeichneten zentralen Teile z. B. des Andromeda-Nebels zusammen, sondern durchdringt und erfüllt das ganze System, und reicht sogar (nach freundlichen Angaben von Herrn *Baade*) noch über die Spiralarme hinaus, zugleich auch die Räume zwischen den Spiralarmen erfüllend. Hierdurch wird auch die auffallende Tatsache verständlich, daß das Verhältnis Leuchtkraft: Masse bei einem Spiralnebel wesentlich kleiner ist als bei der Sonne: Während die Masse des normalen Spiralnebels etwa das 10^{11} -

⁵⁾ Vgl. Die Herkunft der Sterne, a. a. O., Kap. II.

⁶⁾ Vgl. *O. Klein, L. Treffenberg*, Arkiv för Matematik, Astronomi o. Fysik **34 A**, Nr. 29, S. 14 und die dort erwähnten Arbeiten; insbes. *O. Klein*, ebenda **34 A**, Nr. 19: *O. Klein, G. Beskow, L. Treffenberg*, ebenda **33 B**, Nr. 1.

fache der Sonnenmasse beträgt, erreicht die Leuchtkraft nur etwa das $2 \cdot 10^9$ fache der Sonne: diese von *Babcock* am Andromeda-Nebel gemachte Feststellung bedeutet immerhin schon eine merkliche Erhöhung des früher von *Hubble* bestimmten Wertes von etwa $85 \cdot 10^6$ Sonnen-Leuchtkräften, in denen die rote Strahlung der vielen roten Zwerge der Population II nicht genügend mitberücksichtigt war.

Die Population I, obwohl sie die optisch auffälligsten Einzelheiten der Spiralnebel (mit Ausnahme der elliptischen) bestimmt, indem sie die Spiralarme zusammensetzt, spielt also nach Masse und Anzahl nur eine recht unerhebliche Rolle gegenüber der Population II, welche bei weitem die Hauptmenge ausmacht. Sinngemäß wird daher jede glaubwürdige Theorie der Sternentstehung in erster Linie die Population II berücksichtigen müssen. Vielleicht ist es sogar berechtigt, die verhältnismäßig seltenen Sterne der Population I geradezu als durch nachträgliche Umbildung aus II entstanden anzunehmen, unter Beteiligung der Staubmassen der Spiralarme⁷⁾. Denn die Gründe, welche *Unsöld*⁸⁾ als Beweismittel für ein geringes Alter der B- und O-Sterne angeführt hat (nur geringer He-Gehalt trotz der riesigen Leuchtkraft), könnten auch wohl durch die Annahme eines Auf sammelns von Materie aus den Dunkelwolken berücksichtigt werden.

Die *Baadesche* Auflösung der zentralen Teile des Andromeda Nebels sowie elliptischer Nebel des lokalen Systems — daß die Milchstraße einen dem Andromeda-Nebel ganz analogen, aus Population II gebildeten Zentralbereich enthält, konnte ebenfalls festgestellt werden⁹⁾ — berechtigt zu dem Schluß, daß auch die sonstigen elliptischen Nebel ganz aus Einzelsternen bestehen, und daß die eigentlichen Spiralnebel außer den von der Milchstraße und dem Andromeda-Nebel her bekannten absorbierenden, nur stellenweise durch Sterne erleuchteten Massen keine weiteren diffusen Massen enthalten. Denn die ältere Vorstellung, daß z. B. die Mitte des Andromeda-Nebels aus „noch nicht zu Sternen kondensierter“ diffuser Materie bestehe, trifft, wie *Zwicky* schon vor geraumer Zeit betont hat, auf die Schwierigkeit, daß dann die Flächenhelligkeit des fraglichen Bereichs um mehrere Zehnerpotenzen größer sein müßte, als sie empirisch ist.

Der traditionellen Vorstellung, daß die Sterne durch Zusammenballung ursprünglich zerstreuter Materie entstanden seien, stehen also folgende empirische Tatsachen gegenüber:

7) Meine Beurteilung dieses Punktes ist entscheidend beeinflusst durch freundliche Mitteilungen von Herrn *Baade*, welcher zu den Beziehungen zwischen Population I und den diffusen Massen der Spiralarme eine Reihe wichtiger empirischer Feststellungen gemacht und ihre vermutliche Bedeutung erörtert hat. Ähnliche Gedanken über die B- und O-Sterne äußerte Herr *v. Weizsäcker*.

⁸⁾ A. *Unsöld*, Z. Astroph. **24**, 278 (1948).

⁹⁾ W. *Baade*, Astr. Soc. of the Pacific **58**, 249 (1946).

Alle Spiralnebel bestehen aus „fertigen“ Einzelsternen, in erster Linie der Population II. Diese Sternpopulation II finden wir anscheinend überall sauber getrennt von der „Verunreinigung“ des Raumes durch Dunkelmaterie. Die scharfe obere Massengrenze dieser Sterne deutet auf einen Entstehungsvorgang, der geeignet ist, hochgradig homogene Ergebnisse zu liefern.

Diese drei Punkte bieten wohl erhebliche Erschwerungen für die traditionelle Vorstellungsweise. Eine Zusammenballung zerstreuter Materie zu Sternen sollte statistisch weit streuende, keine scharfe obere Grenze zeigende Sternmassen liefern. Sie ließe ferner vermuten, daß es heute noch Beispiele von Spiralnebeln gäbe, die sich noch nicht zu Sternen verdichtet hätten. Endlich sollte sie erhebliche Restbestände von unverbrauchter Aufbaumaterie übrig lassen, im Gegensatz zur empirischen „Sauberkeit“ des von der Population II erfüllten Raumes. Hiergegen könnte zwar eingewandt werden, daß der beobachtete Zustand durch nachträgliche Trennung von Sternen und diffuser Materie entstanden wäre; jedoch wäre es von diesem Standpunkt aus ein weiteres schwieriges Problem, dynamische Gründe für die vollständige Trennung von fertigen Sternen und unverbrauchter diffuser Materie zu finden.

3. Supernovae.

Nach einem von *Unsöld* (a. a. O.) vor mehreren Jahren gefaßten und vom Verfasser übernommenen Gedanken sollten die Supernovae Sternerzeugungen bedeuten, und aus ihnen sollten die (als besonders jung angesehenen) B-Sterne hervorgehen. Kritische Erörterungen, welche uns Herr *Baade* freundlicherweise vorgebracht hat, machen jedoch gewisse Abänderungen dieser Vorstellung erforderlich. Der tatsächliche enge empirische Zusammenhang von B-Sternen und Supernova-Ausbrüchen bezieht sich nämlich gerade auf die Supernovae II. Diese sind typische Phänomene der Sternpopulation I und scheinen somit zu den B-Sternen in der Tat in enger Beziehung zu stehen. Jedoch ist das Erscheinungsbild einer Supernova II nur durch quantitatives Ausmaß, nicht aber qualitativ verschieden von dem einer gewöhnlichen Nova und die Inanspruchnahme dieser Supernova II als ein vom gewöhnlichen Nova-Phänomen wesentlich verschiedener Vorgang somit kaum möglich. Mit allem Vorbehalt könnte man vielleicht sagen, daß eine Supernova II einen Nova-Vorgang darstellt, welcher sich an einem B-Stern abspielt und deshalb besonders kräftig ist. Ferner veranlassen die schon in § 2 besprochenen, mir ebenfalls durch Herrn *Baade* bekanntgewordenen Tatsachen, das jugendliche Alter der B-Sterne als doch noch ungewiß anzusehen und jedenfalls das Problem der Sternentstehung in erster Linie auf die Population II zu beziehen.

Dagegen sind die 5- bis 10mal selteneren Supernovae I auch qualitativ deutlich verschieden von gewöhnlichen Nova-Ausbrüchen; und sie sind im Gegensatz zu den Supernovae II Erscheinungen, die keinerlei Bindung an die Population I zeigen, also wohl grundsätzlich der Population II zuzurechnen sind. Hierin bestärkt uns auch die Tatsache, daß nach Ergebnissen von *Minkowski* (gemäß Mitteilung von Herrn *Baade*) die planetarischen Nebel ausgesprochenenmaßen der Population II angehören. Sie als die Supernovae I der letzten 10^4 bis 10^5 Jahre anzusehen, scheint eine vernünftige, wenn auch noch nicht sicher zu rechtfertigende Vermutung. (Die aus Häufigkeit und mittlerer Lebensdauer der planetarischen Nebel ermittelte Frequenz ihres Auftretens entspricht der — freilich nur unsicher zu schätzenden — Häufigkeit galaktischer Supernovae I; und die gegenüber dem Krebsnebel kleineren Expansionsgeschwindigkeiten der älteren planetarischen Nebel könnten zwanglos so gedeutet werden, daß die schnellsten Expansionshüllen bereits unerkennbar geworden sind.)

Supernovae I waren die drei historischen galaktischen Supernovae, über welche nach *Baade* und *Minkowski* heute insbesondere folgendes zu sagen ist¹⁰⁾:

Die beim Krebsnebel vorliegenden Verhältnisse scheinen durchaus typisch zu sein. Die ausführliche empirische und theoretische Untersuchung führt nach *Minkowski* zu dem Ergebnis, daß die von dieser Supernova ausgestoßenen Massen etwa 15 Sonnenmassen betragen. Der Zentralstern ist jetzt als weißer Zwerg mit der ungewöhnlichen Oberflächentemperatur von etwa $5 \cdot 10^5$ Grad anzusprechen, und seine Größe ist derart, daß seine mittlere Dichte 190 000 M beträgt, wenn M seine (unbekannte) Masse, gemessen in Sonnenmassen, ist. (Wahrscheinlich ist M ungefähr gleich 1.) Den bei den sonstigen planetarischen Nebeln gefundenen Verhältnissen schließt sich dieser Befund insofern vernünftig an, als ja auch deren — jetzt schon ältere — Zentralsterne hohe Temperaturen, aber in der mäßigeren Größenordnung von $5 \cdot 10^4$ Grad haben; sie scheinen allerdings geringere Dichten zu besitzen, immerhin aber auch den weißen Zwergen näherzustehen als die Hauptreihensterne. Jedoch soll die Frage, ob die planetarischen Nebel wirklich als frühere Supernovae anzusehen sind, jetzt offengelassen bleiben.

Als weißer Zwerg muß der Zentralstern der Krebsnebel gemäß *Bethe-Marshak* ein reiner He-Stern sein (abgesehen vielleicht von einer dünnen Außenhaut). Dieser Umstand könnte dazu führen, ihn *nicht* als einen neu entstandenen, sondern im Gegenteil als einen bei Gelegenheit des Supernova-Vorgangs

¹⁰⁾ W. *Baade*, *Astroph. J.* **96**, 188 (1942); **97**, 119 (1943); **102**, 309 (1945). R. *Minkowski*, ebenda **96**, 199 (1942); **97**, 128 (1943).

in sein Endstadium eingetretenen Stern anzusehen. Die Tatsache, daß dieser Stern heute in der Tat als Stern des Endstadiums vorliegt, ist aber noch kein Beweis dafür, daß er ein hohes Alter besitzt oder überhaupt schon vorher in anderer Form vorhanden gewesen sei. Man muß folgendes erwägen: Wenn wir versuchsweise für die Supernovae I den *Unsöldschen* Gedanken annehmen und sie als Sternentstehungen deuten, so kann dies sowieso nur so gemeint sein, daß lediglich ein sehr kleiner Teil der Milchstraßensterne auf ähnliche Weise wie der Zentralstern des Krebsnebels aus einer Supernova I entstanden wäre, da ja wegen der Seltenheit der Supernovae I in höchstens $5 \cdot 10^9$ Jahren *höchstens* etwa 10^7 Sterne in dieser Weise entstanden sein könnten. Man muß dann ergänzend annehmen (und die vom Verfasser vorgeschlagene Theorie bietet dafür ein bestimmtes Bild, das hier aber nicht näher erörtert werden soll), daß in einem gewissen Entstehungsstadium der Milchstraße ihre 10^{11} Sterne in viel rascherer Aufeinanderfolge entstanden seien; auch dann, wenn wir uns deren damalige Entstehung *ähnlich* einem Supernova-Vorgang denken, lassen die damals jedenfalls als erheblich andersartig vorauszusetzenden Bedingungen die Möglichkeit offen, daß die damals entstandenen Sterne *nicht* reine entartete He-Sterne waren, sondern eben normale Sterne der Population II.

Diese Erwägungen sollen hier nicht zur Begründung irgendwelcher Hypothesen dienen, sondern lediglich verdeutlichen, daß die besprochenen empirischen Tatsachen *noch keinerlei Entscheidung darüber gestatten*, ob der Krebsnebel als Sternentstehung gedeutet werden kann oder nicht. Die *Unsöldsche* Hypothese bleibt jedenfalls vorläufig eine diskutierbare Möglichkeit. Andererseits sei betont, daß die vom Verfasser vertretene Theorie der Sternentstehung bei sinngemäß vorsichtiger Formulierung nicht unbedingt die Richtigkeit der *Unsöldschen* Hypothese voraussetzt oder erfordert, obwohl eine Bestätigung dieser Hypothese natürlich andererseits eine schlagende Bestätigung und Stütze meiner Theorie bedeuten würde.

Wenn man die *Unsöldsche* Hypothese als Erklärung der Supernovae I *vermeiden* will, so muß man die Möglichkeit betrachten, die Entstehung des Krebsnebels aus einem vorhanden gewesenen Stern zu verstehen. Folgende Möglichkeiten sind in der Literatur erwogen worden:

1. Die alte Theorie von *Baade* und *Zwicky*, es handle sich um einen Zusammenbruch mit einem Neutronenstern als Ergebnis, ist durch die erwähnten Tatsachen offenbar widerlegt.

2. Die *Chandrasekharsche* Theorie ist durch die in § 1 erwähnten Erwägungen ausgeschaltet.

3. Die von *Gamow* näher ausgeführte Theorie, nach welcher die Supernovae ganz allgemein nur als Extremfälle von Nova-

Vorgängen anzusehen und im Zusammenhang mit diesen zu erklären seien, hat vielleicht die meiste Aussicht, sich zu bewähren. Jedoch scheint es etwas bedenklich, daß dieser Deutungsversuch die anscheinend recht tiefgreifenden qualitativen Verschiedenheiten zwischen Supernovae I und II außer acht läßt.

4. Von *v. Weizsäcker* ist kürzlich der Gedanke ausgesprochen worden, daß die Bildung eines Doppelsterns — im *Jeans*-schen Sinne, durch Teilung eines zu rasch rotierenden Sterns — zu sehr hellem Aufleuchten führen müsse, weil zeitweise innere Teile des sich teilenden Sterns an die neue Oberfläche gelangen. Der thermische Energiegehalt eines Sterns — also etwa 10^{48} erg — würde dann eine obere Grenze für den möglichen Energieauspuff ergeben, welche bei diesem Vorgang ungefähr erreicht würde. Jedoch ist dabei übersehen, daß — wie seinerzeit schon *Baade* und *Zwicky*¹¹⁾ vorgerechnet haben — eine strahlende Oberfläche von etwa 10^6 Grad Temperatur, welche 10^{48} erg sichtbaren Lichtes abgibt, nach dem *Planckschen* Gesetz etwa 10^{53} erg insgesamt (vorwiegend im Ultraviolett) ausstrahlt. Die empirische Energielieferung einer Supernova I ist also um mehrere Zehnerpotenzen größer, als die *Weizsäckersche* Deutung zuläßt. — Übrigens besitzen die expandierenden Nebelmassen wohl etwa 10^{50} erg kinetische Energie.

Nimmt man an — was wohl die Meinung *v. Weizsäckers* war —, daß bei der Doppelsternbildung *keine* Explosion in der Art einer Nova geschieht, sondern daß der vorübergehend auf etwa 10^6 Grad erhitzte Teil der Sternoberfläche nicht größer als einige Prozent der Sonnenoberfläche wäre, so könnten davon innerhalb der in Betracht kommenden Zeit — wie ebenfalls aus den elementaren Rechnungen von *Baade* und *Zwicky* zu entnehmen ist — nur etwa 10^{42} erg sichtbaren Lichtes ausgesandt werden (und etwa 10^{47} erg Ultraviolett). Entsprechende Erhitzung auf 10^7 Grad würde die Gesamtausstrahlung mit 10^4 , aber die sichtbare nur mit 10 (entsprechend dem *Rayleigh-Jeansschen* Gesetz) multiplizieren.

Ganz abgesehen von den besprochenen Einwänden scheint es, daß die *Weizsäckersche* Deutung unmittelbar empirisch widerlegt wird: Der Krebsnebel widerspricht dieser Hypothese nicht nur durch die Explosionshülle von 15 Sonnenmassen, sondern scheint auch keinen Doppelstern zu enthalten. Er läßt zwar in seiner Mitte *zwei* Sterne erkennen, doch gehört nach Ausweis der Eigenbewegung anscheinend nur der eine dieser Sterne dem Nebel an, während der andere nach *Baade* als entfernter Hintergrundstern anzusehen ist.

Eine überzeugende Erklärung des Supernova-I-Phänomens auf Grund der Voraussetzung einer Unrichtigkeit der *Unsöld-*

¹¹⁾ *W. Baade* und *F. Zwicky*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 254 (1934).

schen Hypothese liegt also bislang nicht vor, sofern man sich nicht entschließt, die *Gamowsche* Theorie anzunehmen. Auch diese wird aber, wie mir scheint, mitbetroffen von der Schwierigkeit der Lichtausbeute von etwa 10^{53} erg, welche *grundsätzlich* kaum eine *andere* Erklärung zulassen kann, als eben die — empirisch widerlegte — Umwandlung in einen Neutronenstern.

Denn die Notwendigkeit, der Supernova I im Maximum der Helligkeit eine Oberflächentemperatur von etwa 10^6 Grad zuzuschreiben, wird unabhängig von der *Weizsäckerschen* Hypothese durch die empirischen Tatsachen bedingt: einerseits durch die *jetzige* noch $5 \cdot 10^5$ Grad betragende Temperatur, andererseits durch die Tatsache, daß die historischen galaktischen Supernovae I bestimmt nicht vorher als Riesensterne bestanden — hieraus ergeben sich, wiederum nach den alten Überlegungen von *Baade-Zwicky*, eine obere Grenze für den *Radius* der Supernova und daraus eine untere Grenze für die Temperatur.

Sofern aber 10^{53} erg Ultraviolettstrahlung als real anerkannt werden, lassen die empirischen Tatsachen kaum noch eine auf die Unsöldsche Hypothese verzichtende Deutung zu. Bei Annahme der *Unsöldschen* Hypothese und ihrer Ausführung im Sinne der Theorie des Verfassers bereitet diese Energiefrage dagegen keine Schwierigkeit mehr.

Jedoch gelten alle diese Erwägungen nur für Supernovae I, und für Supernovae II, die schon vor dem Ausbruch Riesensterne gewesen sein mögen, besteht kein Hindernis, sie mit *Gamow* als Spezialfall der gewöhnlichen Nova-Vorgänge anzusehen. Dies um so mehr, als auch die sichtbare Lichtabgabe der Supernovae II etwa 10mal kleiner (der Gesamtauspuff also 10^4 mal kleiner) als bei einer Supernova I ist.

4. Die Höhenstrahlung.

Nachdem es empirisch gesichert scheint, daß die eruptiven Vorgänge auf der Sonne kleine Beiträge zur Höhenstrahlung liefern, wird man nicht zweifeln, daß bewegtere Sternvorgänge — Nova-Ausbrüche und Supernovae — ihrerseits noch wesentlich kräftigere Beiträge liefern. Es scheint deshalb naturgemäß, folgende *heuristische Hypothese* zu erwägen:

Alle vorhandene Höhenstrahlung ist erzeugt durch Sternvorgänge, wie sie heute noch vor sich gehen.

Natürlich müssen auch gegenteilige Annahmen, wie sie von *Lemaître* und *Regener* vorgeschlagen wurden, im Auge behalten werden. Eine sorgfältige Diskussion jener heuristischen Annahme wird man jedoch als unbedingt geboten ansehen müssen. Dabei wäre etwa folgendes zu sagen:

Setzen wir als gegeben voraus, daß die mittlere Massen-

dichte im Kosmos etwa $10^{-28} \text{ g cm}^{-3}$ betrage, und die der Energiedichte der Höhenstrahlung entsprechende Massendichte etwa $10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$, die des sichtbaren Lichtes endlich etwa $10^{-36} \text{ g cm}^{-3}$. Wird nun der Ursprung der Höhenstrahlung in den Sternen gesucht, so nötigt die empirische Tatsache, daß die Milchstraße *keinen* merklichen Beitrag zu ihr leistet, zu der Folgerung, daß in erster Linie *solche* Sternvorgänge kosmische Strahlung erzeugen, welche in der Milchstraße zur Zeit nicht auftreten. Man wird also zwangsläufig auf die alte Hypothese von *Baade* und *Zwicky*¹²⁾ zurückgeführt, welche seinerzeit die Supernovae für die Höhenstrahlung verantwortlich machten. Die seither bekanntgewordenen sehr großen Energien der Höhenstrahlteilchen zwingen aber zu einer Abänderung der damaligen *Baade-Zwicky*schen Intensitätsbilanz der Höhenstrahlung. Es ist jetzt nicht mehr diskutierbar, die ultraviolette Temperaturstrahlung, welche im oben besprochenen Sinne mit der sichtbaren Emission von 10^{48} erg verknüpft sein muß, einfach als Höhenstrahlung anzusehen. Sondern man wird, wenn ein Stern der Massenenergie $\text{Mc}^2 = 10^{55} \text{ erg}$ einen sichtbaren Auspuff von annähernd 10^{48} erg und einen ultravioletten von annähernd 10^{53} erg liefert, die gleichzeitige Lieferung von Höhenstrahlung vielleicht schätzungsweise auf 10^{49} erg ansetzen dürfen — es ist allerdings schwer, hier mehr als ganz hypothetische Schätzungen anzugeben. Jedenfalls wird man — abweichend von der seinerzeitigen *Baade-Zwicky*schen Bilanz — zugeben müssen, daß die in den „fertigen“ Spiralnebeln noch auftretenden Supernovae I bei weitem nicht häufig genug sind (um einen ungefähren Faktor 10^{-4} zu selten sind), um zur Erzeugung der Höhenstrahlung während der höchstens $5 \cdot 10^9$ Jahre des Weltalters ausgereicht zu haben. Wohl aber käme man zurecht mit der Hypothese, daß *jeder* existierende Stern einmal einen einer Supernova I ähnlichen Zustand durchlaufen hat — eine Hypothese, zu der ja auch die in § 1 erwähnten Ergebnisse von *Klein*, *Beskow* und *Treffenberg* drängen, welche dafür sprechen, daß *jeder* Stern — als Einzelstern — einmal einen abnormen Zustand sehr hoher Temperatur und Dichte durchgemacht (und damals seinen Gehalt an schweren Elementen aufgebaut) hat.

Die Zahlwerte der soeben durchgeführten Erläuterung sind vielleicht noch kleiner Korrekturen bedürftig, und wir wollen sogar die Möglichkeit zulassen, daß infolge stärkerer Korrekturen die gezogenen Schlüsse noch gewisse Modifikationen erleiden könnten. Jedenfalls wird man aber die angedeuteten Beziehungen (in der jetzigen oder einer verbesserten Form) in jeder kosmologischen Theorie sorgfältigst beachten müssen.

¹²⁾ *W. Baade* und *F. Zwicky*, Proc. Nat. Acad. Sci. **20**, 259 (1934).

In enger Beziehung zu den Problemen der Höhenstrahlung steht auch die Frage der „Antimaterie“, bestehend aus negativen Protonen, Antineutronen und Positronen. *O. Klein*¹³⁾ hat den Gedanken geäußert, daß die Höhenstrahlung teilweise dadurch zustande kommen könnte, daß atomare oder staubförmige Teilchen von Antimaterie im interstellaren Raum vorhanden seien und in die Erdatmosphäre eindringen. Obwohl dieser Gedanke sehr verlockend scheint, habe ich jetzt doch Bedenken, ihn für vertretbar zu halten. Denn einerseits ist die Theorie der Höhenstrahlung mit ihren Schauern usw. so ausführlich durchgebildet — auf Grund einer von dem *Kleinschen* Vorschlag abweichenden Voraussetzung —, daß es schwierig scheint, sie so radikal zu ändern. Andererseits wäre kaum zu begreifen, warum nicht auch unter der ständig in Form von Meteoren, Sternschnuppen und kosmischem Staub in die Atmosphäre eindringenden außerirdischen Materie — die nach *Hoffmeister* größtenteils auch sicher nicht dem Planetensystem entstammt — ebenfalls Antimaterie, in größeren Brocken, vorkommen sollte; das ist ja aber sicher nicht der Fall, da es zu sehr auffälligen Effekten führen müßte. Ich bin also geneigt, es als empirisch wahrscheinlich anzusehen, daß es innerhalb der Milchstraße keine Antimaterie gibt (außer den durch kosmische Strahlung erzeugten, schnell wieder verschwindenden Antiteilchen).

Als offen muß man dagegen die Frage betrachten, ob auch die übrigen Spiralnebel durchweg aus gewöhnlicher Materie oder in statistischer Verteilung zur Hälfte aus Antimaterie bestehen. Man wird geneigt sein, diese Frage in Verbindung zu bringen mit der anderen Frage, ob in der primären Höhenstrahlung die positiven Protonen gegenüber den negativen bevorzugt sind oder nicht. Die meisten Bearbeiter der Höhenstrahlung sind wohl geneigt, diese Frage als bereits entschieden anzusehen — in dem Sinne, daß es sich tatsächlich eben um positive Protonen handle. Ich habe aber den Eindruck, daß diese Ansicht bislang noch unbewiesen ist, da eine gründliche Prüfung dieser Frage noch völlig fehlt. Da jedenfalls die Wechselwirkung mit unserer Erdatmosphäre bei positiven und negativen einfallenden Protonen durchaus verschieden verlaufen muß, so brauchen die empirisch vorhandenen Vorzeichen-Unterschiede vielleicht keineswegs schon der Primärstrahlung als solcher zugeschrieben zu werden.

Vom Standpunkt der vom Verfasser vertretenen Theorie der Sternentstehung und Spiralnebelentstehung wäre als das theoretisch Wahrscheinliche zu erwarten, daß einerseits jeder Spiralnebel in sich einheitlich aus Materie oder aus Antimaterie

¹³⁾ *O. Klein*, Arkiv för Matematik, Astronomi o. Fysik **31 A**, Nr. 14.

besteht, der ganze Kosmos aber Materie und Antimaterie in gleicher Menge enthält (und die Höhenstrahlung gleiche Mengen positiver und negativer Protonen).

Obwohl die hier vorgelegte Diskussion gewiß noch in mehrfacher Hinsicht Verbesserungen erlauben wird, so dürfte sie doch immerhin zeigen, daß wir auf Grund verschiedener erst seit einigen Jahren erzielter empirischer Ergebnisse heute den Spielraum kosmologischer Hypothesenbildung schon sehr erheblich einschränken können. Die unmittelbar verwendbaren Tatsachen sowohl als auch die theoretischen Untersuchungen, soweit sie sich auf eine hypothesenfreie Klarstellung beweisbarer Erkenntnisse richten (wie betreffs der Entwicklungstendenz der Spiralnebel oder betreffs der kosmischen Häufigkeitsverteilung der Elemente), ergeben verschiedene Stützen oder Bestätigungen und bislang in keinem Punkte ein Hindernis für die vom Verfasser vertretene Theorie der Sternentstehung.

Zum Streuprobblem von Nukleonen*).

Von

P. Urban und F. Schwarzl.

Institut für theoretische Physik der Universität Graz.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 23. Oktober 1948.)

Einleitung und Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit werden die Wirkungsquerschnitte für die Prozesse berechnet, bei denen ein Proton (Neutron), dessen Anfangsenergie groß ist gegenüber seiner Ruheenergie, an einem Proton (Neutron) unter Ausstrahlung eines Mesons gestreut wird. Dabei wurde die Kernaustauschkraft zugrunde gelegt und die skalare *Yukawatheorie* benützt.

Der gleiche Prozeß wurde bereits von *Nordheim* und *Nordheim*¹⁾ durchgerechnet, jedoch unter Benützung des falschen Wechselwirkungsterms $H_{s,s} = \sum H_{s_0 s'} H_{s' s''} H_{s'' s} / (E_{s_0} - E_{s'}) (E_{s'} - E_{s''})$ (Formel (19a) ihrer Arbeit), der nach der allgemeinen Störungstheorie richtig lauten sollte:

$$H_{s_0 s} = \sum H_{s_0 s'} H_{s' s''} H_{s'' s} / (E_{s_0} - E_{s'}) (E_{s_0} - E_{s''}).$$

Bereits 1947 wurde die Störungsrechnung mittels des richtigen Resonanznenners durchgeführt²⁾ und untersucht, wie weit sich die Störungsrechnung exakt durchführen läßt und inwiefern der Unterschied der Resonanznenner die Endformeln beeinflußt.

Daher werden wir uns bei der quantentheoretischen Störungsrechnung kurz fassen können und verweisen für eine breitere Darstellung auf die oben zitierte Arbeit²⁾. Hingegen wollen wir die Diskussion der Endformeln und den Vergleich mit den Resultaten *Nordheims* und *Wangs* ausführlich behandeln.

Wir werden zu dem Resultat kommen, daß die Formel für den integralen Wirkungsquerschnitt im wesentlichen mit dem *Nordheimschen* Wert übereinstimmt. Allerdings werden wir

*) Herrn Geheimrat Prof. A. Sommerfeld zu seinem 80. Geburtstag gewidmet.

¹⁾ *Nordheim* und *Nordheim*, Phys. Rev. **54**, 254, 1938.

²⁾ *F. Schwarzl*, Dissertation Wien 1947.

noch Zusatzglieder erhalten, die, zumindest bei kleineren Anfangsenergien des einfallenden Protons, den Wirkungsquerschnitt stark beeinflussen.

Ferner wurde derselbe Prozeß noch von *F. S. Wang*³⁾ mit Hilfe der *Weizsäcker-Williams*-Methode durchgerechnet, wobei jedoch eine Diskrepanz in den Endformeln von *Nordheim* und *Wang* besteht. Es zeigt sich nun, daß der von uns erhaltene Wirkungsquerschnitt sich besser an die Abschätzung von *Wang* anschließt als der *Nordheimsche*. Er „interpoliert“ gewissermaßen die beiden Werte. Die letzten Unterschiede zwischen der *Wangschen* und unseren Formeln dürften wohl darauf zurückzuführen sein, daß die von *Wang* benützte *Weizsäcker-Williams*-Methode ein halbklassisches Näherungsverfahren darstellt, also keine genauen Resultate geben kann.

Ausführung der quantentheoretischen Störungsrechnung.

Wir beschreiben die Austauschwirkung der schweren Partikel im Anschluß an *Nordheim* und *Nordheim* (Formel (8) ihrer Arbeit) durch die *Hamiltonfunktion*:

$$H = 2 \int \pi \hbar c G \int \{ \psi^* (\Psi_N^* \Psi_P) + \psi (\Psi_P^* \Psi_N) \} dV \quad (1)$$

Dabei sind Ψ_N und Ψ_P die Wellenfunktionen des Neutrons bzw. Protons, die der *Diracschen* Wellengleichung gehorchen, ψ die skalare Wellenfunktion des Mesons, die der *Klein-Gordonschen* Gleichung gehorcht. G ist eine Austauschkonstante von der Dimension einer Ladung. Zur Quantisierung eines Mesonfeldes bilden wir die *Fourierzerlegung*:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum q_B e^{i(\vec{B} \cdot \vec{r})/\hbar c} & q_B &= -i/(2 E_B)^{1/2} (-a_B + b_B^*) \\ q_B^* &= -i/(2 E_B)^{1/2} (a_B^* - b_B) \end{aligned} \quad (2)$$

E_B und \vec{B} sind Energie und Impulsvektor des Mesons. Beide sind, wie überhaupt alle Impulse und Energien in dieser Arbeit, in Energieeinheiten gemessen. Dabei bedeuten die Operatoren a und a^* die Vernichtung, bzw. Erzeugung eines Mesons positiver Ladung, b^* und b die Erzeugung und Vernichtung eines negativen Mesons. Aus (1) erhält man sofort die vier entsprechenden Matrixelemente, von denen wir das erste anschreiben:

$$H_{N \rightarrow B^+ P} = i 2 \int \pi \hbar c G (u_P^* \beta u_N) (2 E_B)^{1/2} \quad (3)$$

Unser Streuprozeß von Nukleonen an Nukleonen läßt vier verschiedene Kombinationen zu, je nachdem ein Proton an

³⁾ *F. S. Wang*, Zs. f. Phys. **115**, 431, 1940.

einem Proton, ein Proton an einem Neutron, usw. gestreut wird. Die Wirkungsquerschnitte werden für alle vier Prozesse die gleichen sein, so daß wir uns nur mit dem einen beschäftigen müssen: $P_0 + N_0 \rightarrow P_1 + P_2 + B$. Dieser Prozeß geht über zwei Zwischenzustände vor sich und hat die sechs Möglichkeiten:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} \\
 P_0 \rightarrow N' + B^{+'} & P_0 \rightarrow N' + B^{+'} & P_0 \rightarrow N' + B^{+'} \\
 N_0 + B^{+'} \rightarrow P_2 & N_0 + B^{+'} \rightarrow P_1 & N' \rightarrow P_1 + B^- \\
 N' \rightarrow P_1 + B^- & N' \rightarrow P_2 + B & N_0 + B^{+'} \rightarrow P_2 \\
 \\
 \text{d)} & \text{e)} & \text{f)} \quad (4) \\
 P_0 \rightarrow N' + B^{+'} & N_0 \rightarrow P_2 + B^{+'} & N_0 \rightarrow P_2 + B^{+'} \\
 N' \rightarrow P_2 + B^- & P_0 + B^{+'} \rightarrow N'' & P_0 + B^{+'} \rightarrow N'' \\
 N_0 + B^{+'} \rightarrow P_1 & N' \rightarrow P_1 + B^- & N'' \rightarrow P_2 + B^-
 \end{array}$$

Daraus können wir sofort die Anfangszustände s_0 , die beiden mit einem Strich bezeichneten Zwischenzustände s' und s'' und die Endzustände s ablesen.

Wir betrachten den Prozeß in dem System, in dem das Neutron am Anfang ruht, in dem also das Moment $\vec{N}_0 = 0$ ist. Nach der allgemeinen Störungstheorie wird der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$d\Phi = 2\pi E_{P_0} / \hbar c P_0 \cdot |H_{s_0 s}|^2 \delta(E_s - E_{s_0}) d\rho_B d\rho_{P_1}$$

$$H_{s_0 s} = \sum_{s', s''} H_{s' s''} H_{s'' s} / (E_{s_0} - E_{s'}) (E_{s_0} - E_{s''})$$

$$\text{mit } d\rho_B = B E_B dE_B d\Omega_B (2\pi \hbar c)^3 \quad d\rho_{P_1} = P_1 E_{P_1} d\Omega_{P_1} (2\pi \hbar c)^3 \quad (5)$$

$d\Omega_B$ und $d\Omega_{P_1}$ sind die Raumwinkelelemente, der Delta-Faktor bezeichnet die Energieerhaltung. Der Energiesatz für den Gesamtprozeß liefert:

$$E_{P_0} + E_{N_0} = E_{P_1} + E_{P_2} + E_{B-}.$$

Wir betrachten den relativistischen Fall: $E_{P_0} \gg M$ (Energie des ankommenden Protons sehr groß gegenüber seiner Ruheenergie). M, μ sind die Ruheenergien des Nukleons und des Mesons. Den Hauptbeitrag zur Summe in der Störungsenergie (5) geben die Terme mit kleinen Resonanznennern, die wir allein berücksichtigen wollen. Die kleinsten Resonanznenner erhalten wir wiederum für kleine Momente $\vec{B}^{+'}$ und $\vec{B}^{+'}$ des Zwischenmesons d. h. für kleine Momentübertragungen zwischen den schweren Partikeln. Bezeichnen wir mit P_2 das Proton, in das das Anfangsneutron übergeht, so wird für kleine Momentübertragung die Energie von P_2 ungefähr gleich der Ruheenergie und die Energiedifferenz von P_2 und N_0 sehr klein gegen die Energie des Zwischenmesons. Damit wird unser Energiesatz:

$$E_{P_0} = E_{P_1} + E_{B-}. \quad (6)$$

Wir nehmen noch $E_{B+} = E_{B-}$ und erhalten aus unserem Schema (4) direkt die Momentensätze in den einzelnen Fällen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{P}_0 &= \vec{N}' + \vec{B}^{+'} = \vec{B}^{+'} + \vec{P}_1 + \vec{B}^- & \text{c) } \vec{N}' &= \vec{P}_1 + \vec{B}^- = \vec{N}'' \\ \text{e) } \vec{N}'' &= \vec{P}_1 + \vec{B}^-, \quad \vec{B}^{+'} = \vec{P}_1 + \vec{B}^- - \vec{P}_0 = -\vec{B}^{+'} \end{aligned} \quad (7)$$

Mit Hilfe des Energiesatzes und unserer Tabelle erhalten wir für die Resonanznenner aus dem Störungsausdruck (5) stets das Produkt von zwei Klammerausdrücken. Jedoch sind nur in den Fällen a), c) und e) beide Klammern klein, so daß also diese Terme die größten Beiträge liefern und von uns in Hinblick allein berücksichtigt werden.

Wir vereinfachen noch die Bezeichnungsweise, indem wir setzen: $E_{P_0} = E_0$ Energie des Anfangsprotons, $E_{N'} = E'$ bzw. $E_{N''} = E''$ Energie der Zwischenneutronen, ferner $E_{P_2} = E_{N_0} = M$ Energie des Endprotons (Anfangsneutrons), $E_{P_1} = E_1$ Energie des zweiten Endprotons und schließlich $E_{B^{+'}} = E_B = \epsilon$ Energie der Zwischenmesonen und $E_B = \epsilon$ Energie des Endmesons. Nun können wir für die drei oben erwähnten Fälle die entsprechenden Matrixelemente ansetzen und sie im Ausdruck (5) einfügen. Dann müssen wir noch berücksichtigen, daß nach unserer Annahme $(u_{P_1}^* \beta u_{N_0}) = 1$ ist. Wir erhalten im Glied für H drei Terme, von denen der erste noch durch Partialbruchzerlegung vereinfacht wird, und bekommen schließlich:

$$\begin{aligned} H_{s_0 s} = \sum \frac{i G^3 \hbar^3 c^3 (2\pi)^{1/2}}{\epsilon'^2 \epsilon^{1/2}} & \left\{ \frac{(u_{P_1}^* \beta u_{N'}) (u_{N'}^* \beta u_{P_0}) (E_0 + E')}{E_0^2 - E'^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(u_{P_1}^* \beta u_{N''}) (u_{N''}^* \beta u_{P_0}) (E_0 + E'')}{(E_0^2 - E''^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Hier können zunächst die Nenner folgendermaßen umgeformt werden: Aus dem Energiesatz des Zwischenneutrons $N'^2 + M^2 = E'^2$ (N' , N'' bedeuten dabei die Momente der Zwischenneutronen) und dem Energiesatz des Mesons erhalten wir zusammen mit (7) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} E_0^2 - E'^2 &= 2(\vec{P}_0 \cdot \vec{B}' + 1/2 p^2 - 1/2 \epsilon'^2) \\ E_0^2 - E''^2 &= 2(\vec{P}_0 \cdot \vec{B}' + 1/2 p^2 - 1/2 \epsilon'^2) \end{aligned} \quad (9)$$

Das können wir zuerst in (8) einsetzen. Nun gilt aber für die Wellenfunktion die Diracsche Gleichung: $E' u_{N'} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{N}') + \beta M u_{N'}$. Dabei bedeuten wie üblich $\vec{\alpha}$ und β die Dirac-matrizen. Verwenden wir nun obige Wellengleichung, indem wir noch zur Abkürzung setzen:

$$\Gamma = E_0 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{N}') + \beta M \quad \Gamma_1 = E_0 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{N}'') + \beta M \quad (10)$$

dann erhalten wir bei Bildung des Absolutquadrates von (8):

$$H_{s_0 s}^2 = \frac{(2\pi)^3 \hbar^6 c^6 G^6}{4 \varepsilon'^4 \cdot \varepsilon (\vec{P}_0 \cdot \vec{B}' + 1/2 \mu^2 - 1/2 \varepsilon'^2)^2} \cdot \\ \cdot [(u_{P_1}^* \beta \Gamma \beta u_{P_0}) (u_{P_0}^* \beta \Gamma \beta u_{P_1}) + (u_{P_1}^* \beta \Gamma_1 \beta u_{P_0}) (u_{P_0}^* \beta \Gamma \beta u_{P_1}) + (11) \\ + (u_{P_1}^* \beta \Gamma \beta u_{P_0}) (u_{P_0}^* \beta \Gamma_1 \beta u_{P_1}) + (u_{P_1}^* \beta \Gamma_1 \beta u_{P_0}) (u_{P_0}^* \beta \Gamma_1 \beta u_{P_1})]$$

Hier müssen wir nun noch über den Spin summieren. Zu diesem Zwecke führen wir die Vernichtungsoperatoren ein:

$$D^{P_0} = 1/2 [1 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{P}_0)/E_0 + \beta M/E_0] \\ D^{P_1} = 1/2 [1 + (\vec{\alpha} \cdot \vec{P}_1)/E_1 + \beta M/E_1] \quad (12)$$

und bilden z. B. vom ersten Term der eckigen Klammer aus (11) die halbe Spur, d. h. wir mitteln über den Anfangsspin. Dabei müssen wir noch die Normierung der Wellenfunktion beachten und nach (7) setzen $N' = N'' = P_0$. Wenn wir die Werte von Γ und Γ_1 einsetzen und berücksichtigen, daß eine ungerade Anzahl Faktoren von α , bzw. von β die Spur Null hat, also bei der Ausmultiplikation gleich ausgelassen werden kann, bekommen wir den Ausdruck:

$$1/2 E_0 E_1 \cdot \{ [E_0^3 E_1 + 3 M^2 E_0 E_1 + 3 M^2 E_0^2 + M^4] - \\ - P_0^2 [3 M^2 + E_0 E_1] - 4 M^2 (\vec{P}_0 \cdot \vec{P}_1) \}. \quad (13)$$

Nun sind alle vier Terme der eckigen Klammer von (11) gleich bis auf die Faktoren Γ und Γ_1 . Der Unterschied zwischen Γ und Γ_1 wurde aber verwischt, indem wir $N' = N''$ setzten. Folglich liefern die übrigen drei Terme denselben Beitrag und wir erhalten für die ganze eckige Klammer den vierfachen Wert von (13).

Nun können wir den erhaltenen Ausdruck unter Benützung der Abkürzungen: $A = G^2/\hbar c$, $R_0 = G^2 M$ in (5) einsetzen und es wird der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$d\Phi = \frac{A R_0^2 M^2 P_0^{-1} \cdot B P_1}{8\pi^2 \varepsilon'^4 \cdot [(\vec{P}_0 \cdot \vec{B}') + 1/2 \mu^2 - 1/2 \varepsilon'^2]^2} \{ [E_0^3 E_1 + \\ + 3 M^2 E_0 E_1 + 3 M^2 E_0^2 + M^4] - P_0^2 [3 M^2 + E_0 E_1] - \\ - 4 M^2 (\vec{P}_0 \cdot \vec{P}_1) \} d\varepsilon d\Omega_B d\Omega_{P_1} \quad (14)$$

Hier fehlt noch die Integration über die Raumwinkel. Zu diesem Zweck führen wir den Vektor $\vec{Q} = \vec{P}_1 + \vec{B}$ ein. Seine Polarwinkel in bezug auf die Achse P_0 seien ϑ und φ . Ferner bezeichnen wir den Winkel zwischen den Vektoren P_0 und P_1

mit χ und den Schnittwinkel der Ebenen $P_1 - Q$ und $P_0 - Q$ mit Ψ . Zur Berechnung der Skalarprodukte verfahren wir folgendermaßen: Das erste Produkt drückt sich durch den Winkel χ aus, den wir wiederum mit Hilfe des sphärischen Dreikants berechnen können. Wir erhalten:

$$(\vec{P}_0 \cdot \vec{P}_1) = P_0(Q^2 + P_1^2 - B^2) \cos \vartheta/2 Q + P_0 P_1 \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos \Psi. \quad (15)$$

Für das zweite Skalarprodukt finden wir mit Benützung der Momentensätze:

$$(\vec{P}_0 \cdot \vec{B}) = P_0(P_0 - Q \cos \vartheta). \quad (16)$$

Ebenso können wir ausdrücken:

$$\epsilon'^2 = \mu^2 + P_0^2 + Q^2 - 2P_0 Q \cos \vartheta. \quad (17)$$

Die beiden Polarwinkel ϑ und Ψ sind zyklisch, wir können also über sie sofort integrieren. Nach Ausführung aller dieser Operationen wird dann der Ausdruck (14):

$$d\Phi = 2A R_0^2 P_0^{-1} d\epsilon \cdot T \quad (18)$$

$$\int_{-B}^{P_1+B} \frac{M^2 E_0^2 \left\{ Q \left[E_0 E_1 + \frac{3M^2 E_1}{E_0} + 3M^2 + \frac{M^4}{E_0^2} \right] - P_0^2 Q \left[\frac{3M^2}{E_0^2} + \frac{E_1}{E_0} \right] - \frac{2M^2}{E_0^2} \left[P_0 (Q^2 + P_1^2 - B^2) \cos \vartheta \right] \right\}}{[\mu^2 + P_1^2 + Q^2 - 2P_0 Q \cos \vartheta]^2 [P_0^2 - Q^2]^2} dQ \sin \vartheta d\vartheta.$$

Um die Integrale auszuführen, führen wir die neuen Integrationsvariablen ein: $z = 1 - \cos \vartheta$ und $y = P_0 - Q$ und bestimmen die oberen und unteren Grenzen von y : $y_0 = P_0 - (P_1 - B)$, $\Delta = P_0 - (P_1 + B)$, bzw. von z : $z = 2$, $z = 0$. Damit erhalten wir für (18) einen Ausdruck der Form

$$T = 2 M^2 E_0^2 \int_{\Delta}^{y_0} dy \cdot 1/\alpha_0^2 \cdot \int_0^2 dz [P_0 c_1 + y c_2 - y^2 c_3 + z c_4] / (\alpha_1 + z \alpha_2)^2, \quad (19)$$

worin die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, c_1, c_2, c_3, c_4$ leicht ersichtliche Abkürzungen sind. Das Glied mit z im Zähler, das bei der Integration einen Logarithmus gibt, können wir vernachlässigen und erhalten nach der Ausführung der ersten Integration für T :

$$T = 4 M^2 E_0^2 \int_{\Delta}^{y_0} dy \cdot [P_0 c_1 + y c_2 - y^2 c_3] \cdot [(2P_0 y - y^2)^2 (y^2 + \mu^2) (y^2 + \mu^2 + 4P_0^2 - 4P_0 y)] \quad (20)$$

Hier ist noch das Integral nach y auszuwerten. Um die Integration einigermaßen übersichtlich ausführen zu können, müssen wir hier vereinfachen: Wir setzen in der letzten Klammer des Nenners $y^2 + \mu^2 \ll -4P_0^2 + 4P_0 y$. Das ist erlaubt, weil die Grenzen von y die Größenordnungen haben werden $y_0 \approx \mu$ und $\Delta \approx \mu$. Nun wird beim Einsetzen nur die untere Grenze von y

die maßgebende sein. Obendrein wird nachher erst über ε integriert werden, und zwar von μ bis $E_0 \approx P_0$. Ebenso können wir das y neben $2P_0$ in der ersten Klammer vernachlässigen und erhalten den einfacheren Ausdruck:

$$T = M^2 E_0^2 / 4 P_0^3 \cdot \int_{\Delta}^{y_0} dy [P_0 c_1 + y c_2 - y^2 c_3] y^2 \cdot (P_0 - y)(y^2 + \mu^2) \quad (21)$$

Zur Ausführung der Integration zerlegen wir entsprechend der Summe im Zähler den Integranden in drei Terme und berechnen die einzelnen Terme durch Partialbruchzerlegung, bei der noch zu berücksichtigen ist, daß nach unserem Approximationsgesichtspunkt $P_0^2 \gg M^2 \gg \mu^2$ ist. Wegen $P_0^2 \gg \mu^2$ können in jedem dieser Teilintegrale bereits Glieder vernachlässigt werden. Mit Hilfe des Energiesatzes und der Relation $B^2 = \varepsilon^2 - \mu^2$ rechnen wir noch aus: $c_1 \approx 4M^4/E_0^2$ und $c_2 < 2M^2 \varepsilon/E_0$ (für große ε). Wir erhalten also für das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta}^{y_0} \frac{1}{y^2} dy = & \left[-4M^2/E_0^2 \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \cdot \frac{1}{y} - 4M^2/E_0^2 \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \cdot \frac{1}{\mu} \arctg \frac{y}{\mu} + \right. \\ & + \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \cdot \frac{1}{y} + 4M^2/E_0^2 \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \frac{1}{P_0} \ln \left(\frac{y^2}{y^2 + \mu^2} \right) + \\ & + 2M^2/E_0 P_0 \left(\frac{\varepsilon}{P_0} \right) \frac{1}{\mu} \arctg \frac{y}{\mu} + \frac{\varepsilon}{E_0} \frac{1}{P_0} \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \ln \left(\frac{y^2}{y^2 + \mu^2} \right) - \\ & \left. - \frac{M^2}{E_0^2} \frac{1}{\mu} \arctg \frac{y}{\mu} + \frac{M^2}{E_0^2} \frac{1}{2P_0} \ln \frac{(P_0 - y)^2}{y^2 + \mu^2} \right]_{\Delta}^{y_0} \quad (22) \end{aligned}$$

Das vierte Glied kann gegen das zweite ohne weiteres vernachlässigt werden, da $\frac{M^2}{E_0^2} \approx \frac{M^2}{P_0^2}$, aber $2 \frac{M^2}{\mu^2} \gg \frac{E}{E_0}$ ist. Ebenso ist das sechste Glied sehr klein gegenüber dem ersten, da $4(M^2 \mu^2) \gg 1$ ist. (Wir nehmen bei allen Abschätzungen ungefähr $M \approx 10\mu$ an.) Zur weiteren Vereinfachung berechnen wir die Grenzen und erhalten mittels der relativistischen Näherungen für die untere Grenze: $\Delta \approx \varepsilon \left(\frac{M^2}{2E_0 E_1} + \frac{\varepsilon - B}{\varepsilon} \right)$. Mit dem Näherungswert für $P_1 \approx E_1(1 - M^2/2E_0^2)$ wird die obere Grenze: $y_0 \approx 2\varepsilon$, also $\Delta < y_0$. Man sieht sofort, daß $y_0 \mu > 1$ und $\Delta \mu > 1$ ist, für alle in Frage kommenden Werte von ε . (ε wird bei der nachherigen Integration das Intervall durchlaufen: $\mu \leq \varepsilon \leq E_0 - M$.) Wir können also den Logarithmus entwickeln und erhalten $[\ln(y^2/y^2 + \mu^2)]_{\Delta}^{y_0} < \mu^2 \Delta^2$ und $[\ln(y^2 + \mu^2)(P_0 - y)^2]_{\Delta}^{y_0} < 7/2$. Mit

Hilfe dieser Bemerkungen sieht man ein, daß in (22) überhaupt nur die ersten beiden Glieder als wesentlich stehen bleiben. Um den Wert der ersten beiden Glieder zu bestimmen, benötigen wir den Ausdruck $(1/\Delta - 1/y_0)$. Hier ist es am geschicktesten, zuerst die genauen Grenzen für y einzusetzen, zu vereinfachen und dann erst die relativistischen Näherungen einzuführen. So erhalten wir:

$$[1/\Delta - 1/y_0] \approx 2 E_0 (E_0 - \epsilon) \epsilon / [\epsilon^2 M^2 - \epsilon E_0 \mu^2 + \mu^2 E_0^2]. \quad (23)$$

Im Arcustangens von (22) können wir für y_0 den Näherungswert einführen: $y_0 \approx 2\epsilon$, während wir das Δ vorläufig noch stehen lassen. Die so ausgeführte Formel setzen wir in (18) ein und erhalten für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\Phi = 2 A R_0^2 \left(\frac{M^2}{P_0^2} \right) \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \left[\frac{2 E_0 (E_0 - \epsilon) \epsilon}{\epsilon^2 M^2 - \epsilon E_0 \mu^2 + E_0^2 \mu^2} + \frac{1}{\mu} (\arctg \Delta / \mu - \arctg 2 \epsilon / \mu) \right] d\epsilon. \quad (24)$$

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt haben wir noch über ϵ von μ bis E_0 zu integrieren. Wir behandeln zuerst das erste Glied aus (24). Indem wir berücksichtigen, daß $M^2 \gg \mu^2$ ist, finden wir eine Partialbruchzerlegung, die sich sofort integrieren läßt. Der erhaltene Ausdruck läßt sich noch wegen $E_0 \gg M \gg \mu$ reduzieren und wird zu:

$$\int_{\mu}^{E_0} \frac{2 E_0 (E_0 - \epsilon) \epsilon}{M^2 \epsilon^2 - \epsilon E_0 \mu^2 + E_0^2 \mu^2} d\epsilon = \frac{2 E_0^2}{M^2} \left\{ \ln \frac{M}{\mu} - 1 + \frac{3 \mu}{2 M} \left[\arctg \left(\frac{M}{E_0} - \frac{\mu}{2 M} \right) \right] \right\}. \quad (25)$$

Nun wenden wir uns zur Integration des dritten Gliedes. Hier ist die geschlossene Auswertung noch möglich, indem wir $2\epsilon/\mu$ als neue Variable einführen. Im Resultat können wir wegen $E_0/\mu \gg 1$ und wegen $\frac{1}{2} \ln E_0/\mu \approx \frac{E_0}{\mu} \arctg \frac{2 E_0}{\mu}$ — hier ist für die Abschätzung $E_0 \approx 10 M$ gesetzt — zwei Terme streichen und bekommen:

$$\int_{\mu}^{E_0} \frac{1}{\mu} \arctg \left(\frac{2 \epsilon}{\mu} \right) d\epsilon \approx \frac{E_0}{\mu} \arctg \frac{2 E_0}{\mu}. \quad (26)$$

Das zweite Glied aus (24) wollen wir nicht in geschlossener Form integrieren, da Δ eine ziemlich komplizierte Funktion

von ε ist. Jedoch ist der Arcustangens in dem von uns betrachteten Intervall eine monotone, nur schwach steigende Funktion, also gut durch ein Polynom approximierbar. Wir können also ohne allzugroßen Fehler das Integral durch die *Simpsonsche* Formel auswerten. Hier ist allerdings eine Bemerkung über die Grenzen von ε am Platze. Wir haben bis jetzt angenommen: $\mu < \varepsilon < E_0$. Die obere Grenze kann nicht genau stimmen, denn das Anfangsproton kann ja nicht seine ganze Energie, sondern nur die um seine Ruheenergie verminderte an das Meson abgeben. Wir müssen also als genauere Grenzen setzen: $\mu < \varepsilon < E_0 - M$. Bei den bisherigen Rechnungen spielte das keine Rolle, da wir stets M neben E_0 vernachlässigt haben; jetzt jedoch wird diese Bemerkung erst die Endlichkeit der oberen Grenze gewährleisten. Wir erhalten in genügender Genauigkeit:

$$\left(\frac{\Delta}{\mu}\right)_{\varepsilon=\mu} \approx 1 \quad \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)_{\varepsilon=1/2(E_0+\mu)} \approx M^2/2E_0\mu \quad \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)_{\varepsilon=E_0-M} \approx M/2\mu.$$

Also wird der mittlere Term:

$$\int_{\mu}^{E_0-M} \frac{1}{\mu} \arctg \frac{\Delta}{\mu} d\varepsilon \approx \frac{E_0}{6\mu} [\arctg 1 + 4 \arctg (M^2/2E_0\mu) + \arctg (M/2\mu)]. \quad (27)$$

Nun setzen wir die Integrale zusammen und nehmen noch: $E_0^2 \approx P_0^2$, dann erhalten wir die Endformel:

$$\begin{aligned} \Phi_I = 4 A R_0^2 \left(\frac{M^2}{E_0^2}\right) \left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \cdot \left\{ \ln \left(\frac{M}{\mu}\right) - 1 + \frac{3\mu}{2M} \left[\arctg \left(\frac{M}{\mu}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \arctg \left(\frac{M}{E_0} - \frac{\mu}{2M}\right) \right] + \left(\frac{M}{E_0}\right) \left(\frac{M}{\mu}\right) \left[-\frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2E_0}{\mu}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{12} \arctg 1 + \frac{1}{3} \arctg \left(\frac{M^2}{2E_0\mu}\right) + \frac{1}{12} \arctg \left(\frac{M}{2\mu}\right) \right] \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

Diskussion und Vergleich der Resultate.

Sehen wir vorläufig vom Einfluß der Arcustangensglieder ab und betrachten wir nur die ersten beiden Terme der geschlossenen Klammer! Dann erhalten wir für den Prozeß: $P_0 + N_0 \rightarrow P_1 + P_2 + B^-$ in erster Näherung:

$$\Phi_{II} = 4 A R_0^2 \left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \left(\frac{M^2}{E_0^2}\right) \left[\ln \left(\frac{M}{\mu}\right) - 1 \right] \quad (28a)$$

Nun haben *Nordheim* und *Nordheim* die Endformel gefunden (Formel (34) ihrer Arbeit)⁴⁾:

$$\Phi_{III} = 16 A R_0^2 \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \left(\frac{M^2}{E_0^2} \right) \left[\ln \left(\frac{M}{\mu} \right) - 1 \right]. \quad (28b)$$

Aus dem Gang der Rechnung geht hervor, daß diese Endformel für alle vier eingangs erwähnten Prozesse gilt, daß also für unseren einzig betrachteten Prozeß der vierte Teil zu nehmen ist. Aus dieser Bemerkung ersehen wir, daß unser Resultat in erster Näherung genau mit dem *Nordheimschen* Resultat übereinstimmt.

Wir wenden uns nun zur Diskussion des vollständigen Wirkungsquerschnittes. Um den Einfluß der Arcustangensglieder zu erkennen, stellen wir zunächst fest: Die Funktion $\arctg x$ ist für positive Argumente (es handelt sich fast ausschließlich um solche) stets positiv und monoton wachsend, obendrein ist sie innerhalb weiter Grenzen (1,∞) nur einer sehr geringen Schwankung unterworfen. Der Beitrag der ersten eckigen Klammer in (28) ist gering, da sie mit μM multipliziert ist. Der Klammerausdruck ist als Ganzes stets positiv, da das erste Glied der Klammer das zweite überwiegt. Man sieht auch, daß der Einfluß der Klammer mit wachsendem E_0 ganz schwach ansteigt. Einen stärkeren Einfluß besitzt die zweite eckige Klammer in (28). Sie ist wesentlich negativ, da der erste Term alle anderen bei weitem überwiegt. Ferner ist wichtig, daß ihr Einfluß wesentlich von E_0 abhängt, da sie mit M/E_0 multipliziert ist. Je kleiner also E_0 ist, desto stärker werden die Abweichungen der genauen Formel von der Näherung (28a) sein. (28a) stellt also bei großem E_0 eine gute Näherung dar, während man bei kleinem E_0 die vollständige Formel (28) verwenden müßte. Allerdings ist es fraglich, ob nach unserer Voraussetzung: $E_0^2 \gg M^2$ das Ergebnis (28) für kleinere Werte von E_0 noch Gültigkeit hat.

Wir geben noch das Schaubild der vollständigen Funktion Φ_I , ferner unseres (des *Nordheimschen*) Näherungswertes. Schließlich zeichnen wir noch den Wert der unten zu besprechenden *Wangschen* Näherung ein. Als Ordinaten sind die Vielfachen des Wirkungsquerschnittes von AR_0^2 , als Abszisse ist der Bruch M/E_0 aufgetragen.

Auf Grund des *Weizsäcker-Williams*-Verfahrens ist *F. S. Wang*⁵⁾ zu einem anderen Resultat für denselben Prozeß gekommen (Formel (42) seiner Arbeit). Dieser Wirkungsquerschnitt lautet, wenn wir die Bezeichnungsweise sinngemäß der unseren angleichen:

⁴⁾ *Nordheim* und *Nordheim*, Phys. Rev. **54**, 254, 1938.

⁵⁾ *F. S. Wang*, Zs. f. Phys. **115**, 431, 1940.

$$\Phi_{IV} = 2kAR_0^2(M/E_0)(M/\mu). \quad (28c)$$

k ist dabei eine Konstante der Größenordnung Eins, die durch die Rechnung entsteht und deren genauer Wert unbestimmt

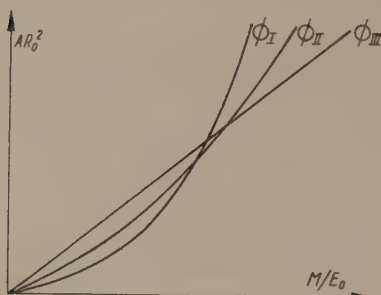


Abb. 1.

ist. Nehmen wir $k \approx 2$ und zeichnen wir Φ_{IV} in unser Diagramm ein, so ergibt sich folgendes: Die numerischen Werte von Φ_{IV} stimmen für den mittleren Bereich der Abszisse ganz gut mit den Werten von Φ_I und Φ_{II} überein, und zwar sehen wir, daß die Übereinstimmung von Φ_{IV} mit Φ_I eine viel bessere ist als die mit Φ_{II} . Unsere genaue Formel „interpoliert“ also gewissermaßen Φ_{II} und Φ_{IV} .

Der Wangsche Wert kann also ganz gut als erste Näherung von (28) aufgefaßt werden. Allerdings bleibt ein prinzipieller Unterschied zwischen beiden Formeln: Die Wangsche stellt eine lineare, unsere eine quadratische Abhängigkeit von der reziproken Anfangsenergie dar. Obendrein enthält der Wangsche Wert einen Faktor M/μ weniger als der unsere.

Diese letzten Unterschiede dürften wohl darauf zurückzuführen sein, daß die Weizsäcker-Williams-Methode, die Wang benützte, ein halb klassisches Näherungsverfahren darstellt und ihre Resultate daher keine exakte Gültigkeit besitzen.

Über das mögliche Ausmaß einer radioaktiven Verseuchung durch die Spaltprodukte des U^{235} .

Von

Hans Thirring, Wien.

(Eingelangt am 2. Juli 1948.)

Zusammenfassung.

1. Die Spaltprodukte des U^{235} mit einer Halbwertszeit von mehr als 8 Tagen: Sr^{89} , Y^{91} , Zr^{95} , Nb^{95} , Ru^{103} , I^{131} , Ba^{140} , Ce^{141} , Br^{143} und Nd^{147} die samt zweien ihrer Tochtersubstanzen, La^{140} und Pr^{144} , als Kriegswaffe zur radioaktiven Verseuchung mißbraucht werden könnten („wirksame Spaltprodukte“, machen zusammen etwa 61 Atomprozent der bei der Uranspaltung zerfallenden U^{235} -Kerne aus.

2. Die Gleichgewichtsaktivität der wirksamen Spaltprodukte beträgt rund 500 Curie je Kilowatt kalorischer Leistung einer Uranbatterie.

3. Ein durch das Ausstreuen radioaktiv verseuchten Staubes erzeugter gleichmäßiger Bodenbelag von $2\text{ C/m}^2 = 0.2\text{ mC/cm}^2$ Aktivitätsdichte verursacht in mittlerer Körperhöhe über dem Boden eine Gammastrahlung mit einer Intensität von rund 10 r/h, die tausendmal größer ist als die internationale Toleranz.

4. Schon im Jahre 1936 betrug die installierte Leistungskapazität der Elektrizitätsversorgungsunternehmen in den USA. 34,7 GW, und hiezu hat man mindestens noch etwa 6 GW der zur Selbstversorgung dienenden Industrie-elektrizitätswerke zu rechnen. Bei Einführung der Atomenergie als Kraftquelle ist mit der Möglichkeit zu rechnen, daß schon in der nächsten Generation etwa ein Fünftel der gesamten elektrischen Leistung aus Atomkraftwerken erzeugt wird. Unter der Annahme eines Wirkungsgrades von 33% wird die für die sechziger Jahre zu erwartende kalorische Leistung dieser Werke mit etwa $N = 36\text{ GW}$ zu veranschlagen sein.

5. Aus solchen Anlagen würden wirksame Spaltprodukte entstehen, deren Aktivität im Zerfallsgleichgewicht rund 18 Milliarden Curie beträgt, während allmonatlich ca. 9 Milliarden nachgeliefert werden. Diese Menge würde genügen, um in einem ersten Überfall bei Kriegsausbruch rund 9000 km^2 und weiter laufend monatlich 4500 km^2 so zu verseuchen, daß die zulässige Strahlungsdosis tausendmal überschritten wird.

Ein weitgehend mit Atomkraftwerken ausgestattetes Industrieland besitzt daher selbst bei Verzicht auf Atombomben in Form der Spaltprodukte des Urans eine tückische und tödlich wirkende Waffe, mit der es Städte und Industrieanlagen des Gegners menschenleer machen kann, ohne diese Anlagen selbst zu zerstören.

In den großen Uranbatterien fallen — ganz gleich, ob sie nun zur Plutoniumherzeugung oder zur Energiegewinnung verwendet werden — radioaktive Isotope als Nebenprodukte in Überfluß an, so daß man bei

friedlichen Absichten für ihre Unschädlichmachung Sorge tragen muß, während im Kriegsfall die Versuchung naheliegt, sie als Massenvernichtungsmittel zu mißbrauchen. Da ein bindendes internationales Übereinkommen hinsichtlich der Ächtung der Atomwaffen bei den Verhandlungen in der Atomenergiekommission der Vereinten Nationen noch nicht getroffen werden konnte, ist vom weltpolitischen wie vom militärischen Standpunkt aus die Frage von Bedeutung, welchen Umfang eine mit den Spaltprodukten des U^{235} erzeugte radioaktive Verseuchung annehmen kann.

Der Bericht von *Smyth* [1] sagt im § 4, 27 über diesen Punkt folgendes:

"In a chain-reacting pile these radioactive fission products build up as the reaction proceeds. (They have, in practice, turned out to be the most troublesome feature of a reacting pile.) Since they differ chemically from the uranium, it should be possible to extract them and use them like a particularly vicious form of poison gas. This idea was mentioned in the National Academy report and was developed in a report written December 10, 1941, by *E. Wigner* and *H. D. Smyth*, who concluded that the fission products produced in one day's run of a 100.000 kw chain-reacting pile might be sufficient to make a large area uninhabitable."

Es wird dann weiter noch hinzugefügt, daß *Wigner* und *Smyth* die Verwendung radioaktiver Verseuchung nicht anempfohlen haben und daß ein solcher Vorschlag auch nachher von keiner verantwortlichen Stelle gemacht worden war, daß man aber während des Krieges mit der Möglichkeit rechnete, daß die Deutschen vielleicht eine solche Waffe gebrauchen würden.

Die in der vorliegenden Arbeit behandelte Frage lautet so: Wie groß ist das Gebiet, das mit dem aus Uranbatterien gegebener Größe anfallenden Material an Spaltprodukten so verseucht werden kann, daß es für eine Zeitlang praktisch unbewohnbar wird?

Es sei gleich vorausgeschickt, daß auf Grund der uns zur Verfügung stehenden Literaturbehelfe bloß die Größenordnung des Umfangs der Verseuchung errechnet werden kann, weil die eingehenden Berichte über die durch die Spaltprodukte erzeugten Körperschädigungen hier noch nicht vorliegen. Immerhin sind Aussagen über die Größenordnung schon aufschlußreich genug, und diese lassen sich mit hinreichender Sicherheit aus den bisher vorliegenden Angaben über Art und Menge der Spaltprodukte des U^{235} einerseits und aus der Erfahrungstatsache andererseits gewinnen, daß für die Gammastrahlen aller radioaktiven Stoffe die schädigende Dosis im wesentlichen von der im Körper erzeugten Ionenmenge abhängt, die ihrerseits wieder der Zahl der pro Sekunde und Quadratzentimeter eingestrahlt Gammaquanten proportional ist.

A. Die Größe der Aktivität des für Verseuchungszwecke verwendbaren Materials.

Wie aus einem von *J. N. Siegel* verfaßten und vom Plutonium-Project herausgegebenen Bericht [2] hervorgeht, sind bisher fast 300 verschiedene Isotope zwischen ${}_3Zn^{72}$ und ${}_{64}Gd^{158}$ festgestellt worden, die bei der Uranspaltung entstehen. Von diesen kommen als Unterlage für unsere Rechnungen nur diejenigen in Betracht, die

- a) in einem nennenswerten Ausmaße anfallen,
- b) Beta- oder Gammastrahlen hinreichender Energie emittieren,
- c) eine etwa zwischen 8 Tagen und einigen Jahren liegende Lebensdauer haben oder radioaktive Abkömmlinge solcher Substanzen sind.

Die gesamte Auswahl reduziert sich dadurch auf die im folgenden als „wirksame Spaltprodukte“ bezeichneten zwölf Isotopen, deren Daten in der Tab. 1 auf Grund der Angaben von *Siegel* zusammengestellt sind.

Tabelle 1. Wirksame Spaltprodukte des U^{235} .

| Z | Kern | Halbwertszeit | Zerfallsart | Ausbeute in Atomprozent | Zerfallsenergie in MeV | |
|----|------------|---------------|-------------------|-------------------------|------------------------|----------|
| | | | | | β | γ |
| 38 | Sr^{90} | 53 Tage | β^- | 4,6 | 1,5 | — |
| 39 | Y^{91} | 57 Tage | β^- | 5,9 | 1,6 | — |
| 40 | Zr^{95} | 65 Tage | β^-, γ | 6,4 | 0,4 | 0,8 |
| 41 | Nb^{95} | 35 Tage | β^-, γ | 6,4 | 0,7 | 0,8 |
| 44 | Ru^{103} | 42 Tage | β^-, γ | 3,7 | 0,2 | 0,5 |
| 53 | I^{131} | 8 Tage | β^-, γ | 2,8 | 0,6 | 0,4 |
| 56 | Ba^{140} | 12,8 Tage | β^-, γ | 6,1 | 1,0 | 0,5 |
| 57 | La^{140} | 40 h | β^-, γ | 6,1 | 1,7 | 1,7 |
| | | | | | | 2,0 |
| 58 | Ce^{141} | 28 Tage | β^-, γ | 5,7 | 0,6 | 0,2 |
| 58 | Ce^{144} | 275 Tage | β^- | | | |
| 59 | Pr^{144} | 17,5 Min | β^-, γ | 5,3 | 3,0 | 0,14 |
| 59 | Pr^{143} | 14 Tage | β^- | 5,4 | 1,0 | — |
| 60 | Nd^{147} | 11 Tage | β^-, γ | 2,6 | 0,9 | 0,6 |

Summe der Atomprocente 61,0

Die in der Spalte 5 der Tabelle enthaltenen Angaben über die prozentuelle Ausbeute bedeuten z. B. für den Fall des Zr^{95} folgendes: Aus je 1000 gespaltenen U^{235} -Kernen entstehen 64 Kerne von Zr^{95} und in weiterer Folge ebensoviel Kerne des daraus als Tochterprodukt hervorgehenden Nb^{95} . In der Tabelle treten drei Paare von Elementen mit gleichen Massenzahlen auf, wobei in jedem Paar der zweite Kern durch β -Zerfall als Tochtersubstanz des ersten erzeugt wird. Im zweiten und dritten Paar sind die Tochterkerne La^{140} und Pr^{144} trotz ihrer kurzen Lebensdauer unter die wirksamen Spaltprodukte zu rechnen, weil sie auch nach dem Abtrennen aus der Uranbatterie im Zerfallsgleichgewicht

mit ihren Elternsubstanzen Ba^{140} , bzw. Ce^{144} dauernd von diesen nachgeliefert werden und deswegen ebenso lange wie sie wirksam sind. Bei der Summierung der prozentuellen Ausbeuten ist dagegen das Ce^{144} nicht mitzuzählen, weil es kein Gammastrahler ist und nur weiche β -Strahlen aussendet; es wurde nur darum in die Tabelle aufgenommen, weil es in der ganzen Mischung als Muttersubstanz des wirksamen Spaltproduktes Pr^{144} von Bedeutung ist. Die in der Tabelle enthaltenen Gammastrahler machen zusammen 61 Atomprozent der gespaltenen U^{235} -Kerne aus, und deswegen ist bei der Berechnung der Aktivität der für militärische Zwecke verwendbaren Spaltprodukte die Zahl der zerfallenden Urankerne mit 0,61 zu multiplizieren.

Die für die Wirksamkeit eines radioaktiven Strahlers maßgebende Größe ist bekanntlich seine *Aktivität*, eine Größe, die der Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Kerne proportional ist. Als Einheit der Aktivität wurde ursprünglich jene von 1 Gramm Radium, bzw. von der mit 1 g Ra im Zerfallsgleichgewicht stehenden Emanationsmenge gewählt und als „Curie“ (abgekürzt C) bezeichnet. Die Zahl der sekundlich zerfallenden Atome in 1 g Ra und in jeder damit im Gleichgewicht stehenden Tochtersubstanz beträgt nun $3,7 \cdot 10^{10}$. Dementsprechend definiert man jetzt auf Grund eines auf dem internationalen Chemikerkongreß 1947 in London gemachten Vorschlages ganz allgemein als die (in Curie gemessene) Aktivität eines Gemisches radioaktiver Stoffe die durch $3,7 \cdot 10^{10}$ dividierte Anzahl der pro Sekunde eintretenden Kernzerfallsprozesse; vgl. [3]. Im Zerfallsgleichgewicht haben alle Glieder einer Generationsreihe die gleiche Aktivität, weil eben das Gleichgewicht darin besteht, daß pro Sekunde ebensoviel Kerne erzeugt werden wie zerfallen.

Zur genäherten Berechnung der Aktivität der in einer Uranbatterie erzeugten Spaltprodukte gehen wir von der Tatsache aus (vgl. *Smyth* [1], S. 28), daß die bei der Spaltung eines U^{235} -Kernes frei werdende Energie im Mittel rund $200 \text{ MeV} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ erg}$ beträgt. Daraus ergibt sich, daß in einer Uranbatterie, bzw. in einem Satz von Uranbatterien je Kilowatt ($= 10^{10} \text{ erg/sec}$) calorischer Leistung die Zahl der sekundlich gespaltenen U^{235} -Kerne:

$$z = \frac{10^{10} \text{ erg/sec}^{-1}}{3,2 \cdot 10^{-4} \text{ erg}} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ sec}^{-1}$$

beträgt.

Die Spaltprodukte des U^{235} werden von Zeit zu Zeit aus der Uranbatterie abgetrennt, und wir nehmen an, sie würden für spätere Zwecke aufbewahrt werden. Dann wird die Menge und damit die Aktivität der gehorteten Spaltprodukte zunächst immer mehr zunehmen, wird aber wegen des eintretenden radioaktiven Zerfalls dieser Produkte nicht unbegrenzt ansteigen, sondern nur bis zum Erreichen eines Gleichgewichts-

zustandes, in dem ebensoviel Kerne erzeugt werden wie zerfallen. Da die wirksamen Spaltprodukte 61 Atomprozent der gespaltenen Urankerne ausmachen, werden im Gleichgewichtszustand $0,61 \cdot 3 \cdot 10^{13}$ wirksame Spaltprodukte zerfallen und ihre Aktivität wird daher gegeben sein durch

$$\frac{0,61 \cdot 3 \cdot 10^{13}}{3,7 \cdot 10^{10}} \approx 500 \text{ Curie je Kilowatt.}$$

Wenn demnach die mit Uranbatterien betriebenen Atomkraftwerke eines Landes eine gesamte kalorische Leistung von N GW haben¹⁾, dann ist die aus ihnen gewinnbare Gleichgewichtsaktivität der wirksamen Spaltprodukte gegeben durch

$$a_0 = 5 \cdot 10^8 N \text{ Curie.} \quad (1)$$

Da die Halbwertszeiten der meisten wirksamen Spaltprodukte zwischen 8 Tagen und 2 Monaten liegen, ist rund 95% der Gleichgewichtsaktivität schon ein Jahr nach Anlaufen der Uranbatterie erreicht. Über die nach einem Monat und nach einem Jahr erreichten Aktivitäten gibt die Tab. 2 die nötigen Auskünfte. Es bedeutet darin $a_i(t)$ die Aktivität des i -ten Isotops zur Zeit t ; $A = 10^6 Nz / 3,7 \cdot 10^{10}$ ist die „Spaltungsaktivität“ der Uranbatterie, also die durch $3,7 \cdot 10^{10}$ dividierte Anzahl der pro Zeiteinheit gespaltenen Urankerne. p_i ist die relative atomare Ausbeute des betreffenden Isotops; T_i seine Halbwertszeit und

$$\lambda_i = \frac{1}{T_i} \ln 2$$

seine Zerfallskonstante. Als Zeiteinheit ist in Tab. 2 der *Tag* gewählt.

Für die unter Nr. 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11 und 12 aufgezählten Isotope wurde die Aktivität mit Hilfe der Formel berechnet

$$a_i(t) = p_i A (1 - e^{-\lambda_i t}). \quad (2)$$

Dagegen gilt für die Tochterprodukte, $i = 4, 8$ und 10, allgemein die Formel (vgl. Meyer-Schweidler [4], S. 59):

$$a_i(t) = p_i A \left\{ 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} e^{-\lambda_i - 1 t} + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} e^{-\lambda_i t} \right\}. \quad (3)$$

Für das kurzlebige Isotop Nr. 10 kann wegen der großen Zerfallskonstanten der letzte Term auf der rechten Seite von (3) für $t = 30$ und darüber gestrichen werden und im vorletzten Term das λ_{i-1} gegenüber dem λ_i vernachlässigt werden, so daß die Formel (3) sich für diesen

Fall einfach so schreibt:

$$a_i(t) = p_i A \{ 1 - e^{-\lambda_i - 1 t} \}. \quad (4)$$

¹⁾ 1 GW (Gigawatt) = 10^9 W = 10^6 kW.

Im übrigen entstehen die Isotope 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11 und 12 auch nicht primär aus der Uranspaltung, sondern sind Glieder einer radioaktiven Zerfallsreihe. Da aber die Vorfahren durchwegs wesentlich

Tabelle 2. Aktivitätsanstieg der einzelnen aus der Uranbatterie gewonnenen wirksamen Spaltprodukte.

| i | Kern | p_i | λ_i | Z_i | $\frac{a_i(30)}{A}$ | $\frac{a_i(365)}{A}$ | $\frac{a_i(\infty)}{A} = p_i$ |
|--|-------------------|-------|-------------|---------|---------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1 | Sr ⁸⁹ | 0,046 | 53 | 0,0131 | 0,015 | 0,046 | 0,046 |
| 2 | Y ⁹¹ | 0,059 | 57 | 0,0122 | 0,018 | 0,059 | 0,059 |
| 3 | Zr ⁹⁵ | 0,064 | 65 | 0,0106 | 0,017 | 0,059 | 0,064 |
| 4 | Nb ⁹⁵ | 0,064 | 35 | 0,0196 | 0,004 | 0,063 | 0,064 |
| 5 | Ru ¹⁰³ | 0,037 | 42 | 0,0165 | 0,014 | 0,037 | 0,037 |
| 6 | I ¹³¹ | 0,028 | 8 | 0,0866 | 0,027 | 0,028 | 0,028 |
| 7 | Ba ¹⁴⁰ | 0,061 | 12,8 | 0,054 | 0,048 | 0,061 | 0,061 |
| 8 | La ¹⁴⁰ | 0,061 | 1,67 | 0,417 | 0,046 | 0,061 | 0,061 |
| 9 | Ce ¹⁴¹ | 0,057 | 28 | 0,025 | 0,030 | 0,057 | 0,057 |
| 10 | Ce ¹⁴⁴ | 0,053 | 275 | 0,00436 | — | — | — |
| 11 | Pr ¹⁴⁴ | 0,053 | 0,00775 | 89,4 | 0,004 | 0,032 | 0,053 |
| 12 | Pr ¹⁴³ | 0,054 | 14 | 0,0495 | 0,052 | 0,054 | 0,054 |
| 13 | Nd ¹⁴⁷ | 0,026 | 11 | 0,091 | 0,022 | 0,026 | 0,026 |
| $\frac{1}{A} \sum a_i(t)$ | | | | | 0,297 | 0,583 | 0,610 |
| $\frac{\sum a_i(t)}{\sum a_i(\infty)}$ | | | | | 0,487 | 0,956 | 1,000 |

kurzlebiger sind (Halbwertszeit in der Größenordnung von Minuten), ist für das Tempo des Aktivitätsanstieges dieser Gruppe von wirksamen Spaltprodukten nur ihre eigene Zerfallskonstante maßgebend, weshalb für sie die Formel (2) anzuwenden ist.

Aus der letzten Zeile der Tab. 2 ergibt sich, daß die Summe der Aktivitäten der ganzen Mischung nach 30 Tagen schon ca. 49% und nach einem Jahr 96% des Gleichgewichtswertes erreicht hat. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (1), daß Atomkraftwerke mit einer kalorischen Gesamtleistung von N GW monatlich eine Ausbeute

an wirksamen Spaltprodukten mit einer Gesamtaktivität von rund

$$\sum a_i(30) = 2,5 \cdot 10^8 \text{ N Curie} \quad (5)$$

liefern können. Diese Spaltprodukte müssen in bestimmten Zeitintervallen der Uranbatterie entnommen werden („decontamination process“, vgl. *Smyth*, l. c., § 8, 15 ff.), um einer „Vergiftung“ der Kettenreaktion vorzubeugen. Das Geschenk der Atomenergie bringt uns daher außer neuen Kraftquellen und der Atombombe noch eine Büchse der Pandora, aus der ein zur Millionenvernichtung tauglicher Giftqualm aufsteigt. Man braucht nicht viel Phantasie zu besitzen und braucht gar nicht erst die Zeitungsmeldungen über Versuche mit „Atomwolken“ gelesen zu haben, um zu verstehen, wie man einem Feind das Gift applizieren kann: Man trinkt ganz feinen Sand oder Metallstaub mit einer wässrigen Lösung von Salzen der betreffenden Stoffe. Nach dem Trocknen ist das Wasser verdunstet und die radioaktiven Substanzen haften in feiner Schicht an der Oberfläche der Staubkörner, die dann in geeigneter Weise mit Flugzeugen oder mit Stratosphärenraketen über dem zu verseuchenden Gebiet zerstäubt werden. Die Wolke des Todesstaubes senkt sich zur Erde (durch Wahl der Korngröße kann man die Fallgeschwindigkeit auf jenen Wert bringen, der geeignet ist, damit die Wolke keine zu große Abdrift durch die Luftströmungen erleidet) und bedeckt den Boden mit einer radioaktiven Schicht, die β - und γ -Strahlen aussendet. Wegen der hohen spezifischen Aktivität der in Frage kommenden Spaltprodukte handelt es sich dabei gewichtsmäßig um sehr geringe Mengen. Denn da die Aktivität je Grammatom den Zerfallskonstanten proportional und daher den Halbwertszeiten verkehrt proportional sind, verhält sich das Gewicht von 1 Curie Ce^{141} mit einer Halbwertszeit von 28 Tagen zum Gewicht von 1 Curie Ra^{226} (Halbwertszeit 1600 Jahre), das definitionsgemäß 1 g ist, so wie $141 \cdot 28 : 226 \cdot 1600 \cdot 365$, woraus sich ergibt, daß 1 Curie Ce^{141} rund $0,03 \text{ mg} = 30 \text{ } \mu\text{g}$ wiegt. Nun ist die Halbwertszeit von Ce^{141} gerade ungefähr die mittlere Halbwertszeit des ganzen Gemisches der zwölf wirksamen Spaltprodukte, so daß man rechnen kann, daß auch 1 Curie der Mischung in der ursprünglichen Zusammensetzung rund $30 \text{ } \mu\text{g}$ wiegt. Wählt man die Konzentration der Tränklösung des Todessandes so, daß der nach dem Trocknen haftende Belag ein halbes Prozent des Gewichtes der Sandkörner ausmacht, so wiegt ein mit 1 Curie Aktivität geladenes Quantum des Sandes 6 mg, derart, daß man mit 6 Tonnen des Sandes eine Milliarde Curie transportieren und abwerfen kann. Ein Bodenbelag mit einer Flächendichte von 1 C/m^2 wiegt daher 6 mg auf den Quadratmeter und ist praktisch unsichtbar. Der mit den Spaltprodukten von U^{235} aktivierte Todessand ist daher die leichteste und zugleich eine der gefährlichsten Kriegswaffen, die es je gegeben hat.

B. Die von einem radioaktiven Bodenbelag erzeugte Gammastrahlung.

In Tab. 3 sind die dem Bericht von *Siegel*, l. c., entnommenen Angaben über die Energien, bzw. Wellenlängen der γ -Strahlen der wirksamen Spaltprodukte den entsprechenden Daten über die Hauptlinien der harten γ -Strahlung der in den medizinischen Radiumpräparaten zur Wirkung gelangenden Gleichgewichtsmischung von $\text{RaB} + \text{RaC}'$ gegenübergestellt. Da die weichen Komponenten des Strahlungsgemisches bei den medizinischen Präparaten durch einen 0,5-mm-Pt-Filter abgeschirmt werden und daher weder im Körper noch bei der Dosismessung zur Wirkung kommen, wurden von den zahlreichen γ -Linien der Radiumzerfallsreihe nur jene in die Tab. 3 aufgenommen, die eine Energie größer als 0,05 MeV haben und deren Intensität als groß angegeben wird.

Tabelle 3. Die Gammastrahlung eines Radiumpräparates im Vergleich zu jener einer Mischung der wirksamen Spaltprodukte.

| RaB + RaC Hauptlinien der harten Strahlung | | Wirksame Spaltprodukte Linien nach <i>Siegel</i> | | | |
|---|--------------------|---|-----------|--------------------|----------------------|
| (X. E.) | E (MeV) | Kern | 100 p_i | (X. E.) | E (MeV) |
| 169 | 0,073 | Rh ¹⁰³ | 3,7 | 617 | 0,02 |
| 159 | 0,078 | Pr ¹⁴⁴ | 5,3 | 91 56 | 0,135 0,22 |
| 99 | 0,125 | Ce ¹⁴¹ | 5,7 | 59 | 0,21 |
| 51 | 0,24 | Ba ¹⁴⁰ | 6,1 | 25 23 | 0,5 0,53 |
| 42 | 0,29 | Ru ¹⁰³ | 3,7 | 23 22 | 0,53 0,56 |
| 35,2 | 0,35 | Nd ¹⁴⁷ | 2,6 | 21 | 0,58 |
| 20,4 | 0,60 | Nb ⁹⁵ | 6,4 | 16,5 16 15,6 | 0,75 0,77 0,79 |
| 11 10 | 1,1 1,23 | Zr ⁹⁵ | 6,4 | 17 15,4 14 | 0,73 0,80 0,88 |
| 8,7 6,9 5,6 | 1,4 1,77 2,2 | La ¹⁴⁰ | 6,1 | 7,3 6,2 5,9 | 1,7 2,0 2,1 |

Wie man aus dieser Tabelle deutlich erkennt, stimmt der Spektralbereich der natürlichen Mischung von wirksamen Spaltprodukten von U^{235} mit jenem der in den medizinischen Präparaten zur Wirkung gelangenden γ -Strahlen so weit überein, daß die beiden Strahlungsgemische sich hinsichtlich Durchdringungsfähigkeit und hinsichtlich der physiologisch in Betracht kommenden Ionisationswirkung im Körpergewebe bestimmt nicht um Größenordnungen unterscheiden können. Deswegen und weil ferner auch das Verhältnis der Zahl der emittierten Gammaquanten zur Zahl der Zerfallsakte von der gleichen Größenordnung ist wie in der Radiumfamilie, werden wir für unsere Überslagsrechnungen zur Ermittlung der von einem Bodenbelag gegebener Dichte verursachten Strahlungsintensität jenen Wert der Dosiskonstanten zugrundelegen können, der für medizinische Radiumpräparate gemessen worden ist. Dieser Wert beträgt für die mit 0.5 mm Pt gefilterte γ -Strahlung

$$K = 8 \frac{r \text{ cm}^2}{\text{mgh}}. \quad (6)$$

Das bedeutet: Ein als punktförmig gedachtes Radiumpräparat, das 1 mg Radium Element im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten enthält und mit 0.5 mm Pt gefiltert ist, emittiert eine γ -Strahlung, deren Intensität in 1 cm Entfernung 8 internationale röntgen je Stunde (8 r/h) beträgt.

Nun enthält ein luftdicht eingekapseltes Radiumpräparat mit 1 mg Ra Element, das im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten steht, insgesamt neun verschiedene aktive Substanzen:

Ra, Em, RaA, RaB, RaC, RaC', RaD, RaE, Po,

und da nach dem eingangs erwähnten Grundgesetz die Aktivität aller Zerfallsprodukte im Gleichgewicht dieselbe sein muß wie jene der Muttersubstanz, beträgt die Gesamtaktivität des Gemisches 9 Millicurie. Durch den Platinfilter werden aber nicht nur alle α - und β -Strahlen abgeschirmt, sondern auch alle γ -Strahlen mit Ausnahme der harten von RaB + C ausgehenden Strahlung. Die durch die Abschirmung nach außen gelangende Strahlung stammt also nur von zwei Zerfallsprodukten, deren Aktivitätssumme 2 mC beträgt. Die auf Curie umgerechnete Dosiskonstante hat daher die Größe

$$K = 4 \frac{r \text{ cm}^2}{\text{mCh}}, \quad (7)$$

und dieser Wert soll den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt werden.

Bei der Ermittlung der Strahlungsintensität, die von einer γ -strahlenden unendlich dünnen Schicht erzeugt wird, hat man mit dem $1/r^2$ -Gesetz zu rechnen (r ist hier der Abstand Quellpunkt—Aufpunkt

und ist nicht mit der Abkürzung für röntgen zu verwechseln), hat aber nicht vom *Lambertschen* Cosinusetz auszugehen. Denn sowohl das sendende wie das empfangende Flächenelement sind für die Gammastrahlung praktisch durchsichtig, und deswegen ist die Strahlung, die das eine Flächenelement vom anderen empfängt, nur vom gegenseitigen Abstand, nicht aber von der gegenseitigen Orientierung der beiden Flächenelemente abhängig.

Wir betrachten eine ebene kreisförmige Platte vom Radius R , die mit der gleichförmigen Aktivitätsflächendichte $\sigma = a/R^2 \pi \text{ mC cm}^{-2}$ geladen sein soll. P sei ein in der Höhe y auf der Plattenachse liegender Aufpunkt. Die Strahlungsintensität in P beträgt nach dem Gesagten

$$S = 2 \pi \sigma K \int_0^R \frac{x dx}{y^2 + x^2} = \pi \sigma K \ln \left(1 + \frac{R^2}{y^2} \right) = \frac{a K}{R^2} \ln \left(1 + \frac{R^2}{y^2} \right). \quad (8)$$

a ist dabei die gesamte Aktivität der Platte; wenn sie in Millicurie gemessen wird, gibt Gl. (8) die Strahlungsintensität in r/h (röntgen je Stunde). Man benützt diese Formel zur Berechnung der Strahlungs-dosis von kreisförmigen Plattenapplikatoren, vgl. *Minder* [5], S. 145. Für $\lim R = \infty$ wächst die rechte Seite von (8) logarithmisch über alle Grenzen. Tatsächlich ist die Formel (8) für eine unendliche Ebene nicht zu gebrauchen, weil nur für kleine Flächen die Strahlungsabsorption in Luft vernachlässigt werden darf. Wir berechnen im folgenden die von einer unendlichen Ebene ausgesendete Strahlung, die von einem im Abstand y von der Ebene im Punkt P gelegenen, senkrecht zur Ebene stehenden und auf der Rückseite durch den Körper abgeschirmten Flächenelement der Haut empfangen wird. Dann ist nur die unendliche Halbebene wirksam; die Integration hinsichtlich des Azimuts φ ist nur von 0 bis π zu erstrecken, also tritt an Stelle des Faktors 2π jetzt nur mehr π . Für größere Strecken ist die Entfernungsabhängigkeit durch

$$r^{-2} e^{-\mu r}$$

gegeben, wobei μ den Schwächungskoeffizienten in Luft bedeutet. Wir erhalten für die Strahlungsintensität in P

$$S = \pi \sigma K \int_0^\infty e^{-\mu r} \cdot \frac{x dx}{r^2}.$$

Nun gilt wegen $r^2 = y^2 + x^2$ und $y = \text{Const}$

$$r dr = x dx,$$

daher

$$S = \pi \sigma K \int_y^\infty r^{-1} e^{-\mu r} dr = -\pi \sigma K \cdot Ei(-\mu y), \quad (9)$$

wobei Ei das Exponentialintegral bedeutet:

$$Ei(-x) = -\int_x^\infty t^{-1} e^{-t} dt = C + \ln x - x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \\ + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots \quad (10)$$

$$C = \text{Eulersche Konstante} = 0,5772156649 \dots \quad (11)$$

Tabellen für das Exponentialintegral finden sich bei *Jahnke-Emde* [6], S. 6—8, und *Meyer-Schweidler* [4], S. 625.

Für die Abhängigkeit des Schwächungskoeffizienten von der Wellenlänge gilt die Formel (vgl. *Kohlrausch* [7], S. 112)

$$\frac{\mu}{n} = 2,24 \cdot 10^{-35} Z^3 \lambda^3 + 6,64 \cdot 10^{-25} \frac{x}{2+x} \quad (12)$$

Dabei bedeutet μ den Schwächungskoeffizienten in cm^{-1} , n die Zahl der Elektronen pro cm^3 des Absorbers: $n = L \varrho Z/A$. Z und A sind Atomnummer, bzw. Atomgewicht des Absorbers, ϱ seine Dichte in gcm^{-3} , $L = 6,06 \cdot 10^{23}$ die Loschmidtsche Zahl und ferner ist λ die in X. E. gemessene Wellenlänge und

$$x = \frac{mc^2}{h\nu} = \frac{\lambda}{\Lambda},$$

wobei Λ die Compton-Wellenlänge $\frac{h}{mc} = 24,2$ X. E. ist.

Wegen der Inhomogenität des Strahlungsgemisches müßte man zu einer genaueren Berechnung die Gleichung (9) durch eine Summe ersetzen

$$S = -\pi \sigma K \cdot \frac{\sum_i p_i Ei(-\mu_i y)}{\sum_i p_i}.$$

Für unsere Übersichtsrechnung genügt es aber, wenn wir in (9) einfach den Schwächungskoeffizienten für eine mittlere Wellenlänge einsetzen. Ein solcher Mittelwert der Energie, bzw. Wellenlänge ist ungefähr

$$E = 0,5 \text{ MeV}, \quad \lambda = 24 \text{ X. E.}, \quad x = 1$$

und daraus ergibt sich gemäß Gl. (12) für Luft von Atmosphärendruck von 20°C

$$\frac{\mu}{\rho} = 0,066 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}, \quad \mu = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

Für die für die Bestrahlung des menschlichen Körpers in Betracht kommenden Abstände vom Boden, nämlich $y = 50 \text{ cm}$, 100 cm und

150 cm, erhält man die in der folgenden Tabelle angegebenen Strahlungsintensitäten:

Tabelle 4.

| y cm | μy dimensionslos | $-Ei (-\mu y)$ dimensionslos | $S = -\pi K Ei \cdot \sigma$ r/h |
|-----------|--------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| 50 | 0,004 | 4,95 | 62,2 σ |
| 100 | 0,008 | 4,26 | 53,5 σ |
| 150 | 0,012 | 3,86 | 58,5 σ |

Ergebnis: Ein gleichförmiger Bodenbelag der wirksamen Spaltprodukte von U^{235} mit einer Aktivitätsdichte von σ -Millicurie/cm² erzeugt in mittlerer Körperhöhe eine γ -Strahlungsintensität von rund 50 σ röntgen je Stunde:

$$S = 50 \sigma \text{ r/h.} \quad (13)$$

σ bedeutet hier die Aktivitätsdichte der Gammastrahler allein, die etwa $\frac{3}{4}$ jener des ganzen Isotopengemisches ausmacht; vgl. Abschnitt C.

C. Die Wirkung der β -Strahlen.

Die β -Strahlen haben zwar ein geringeres Durchdringungsvermögen als die γ -Strahlen, dafür ist aber ihre spezifische Ionisationswirkung wesentlich höher, so daß die Dosiskonstante für β -Strahlen von 1 MeV Energie mindestens dreißigmal größer ist als die der γ -Strahlen, vgl. *Smerecker-Juris* [16]. Eine genaue Berechnung der von der β -Strahlung herrührenden Intensität ließe sich erst durchführen, wenn die β -Spektra samt ihrer Energieverteilung für die in Frage kommenden wirksamen Spaltprodukte bekannt wären. Da dies nicht der Fall ist, läßt sich nur eine rohe Abschätzung angeben. Die wirksamen Spaltprodukte mit β -Energien von 1 MeV und darüber sind Sr^{89} , Y^{91} , Ba^{140} , La^{140} , Pr^{143} und Pr^{144} ; sie machen zusammen 33,4 Atomprozent der gespaltenen U^{235} -Kerne aus.

Für β -Strahlen dieses Energiebereiches kann man bei vorsichtiger Schätzung die Dosiskonstante zu mindestens 120 cm^2/mCh und den Schwächungskoeffizienten in Luft mit rund $0,005 \text{ cm}^{-1}$ ansetzen. Unter der Verwendung der Gleichung (9) erhält man für die von einem gleichmäßigen Bodenbelag von $\sigma \text{ mC/cm}^2$ Aktivitätsdichte erzeugte Strahlungsintensität in der Höhe von $y \text{ cm}$ über dem Boden die in Tab. 5 angegebenen Werte.

Tabelle 5.

| | | | | |
|-------|--------------|--------------|--------------|-----|
| $y =$ | 50 | 100 | 150 | cm |
| $S =$ | 376 σ | 211 σ | 128 σ | r/h |

σ bedeutet hier die Aktivitätsdichte der harten β -Strahler, die ungefähr die halbe Aktivität des gesamten Gemisches ausmachen.

Eine untere Grenze der gesamten, aus β - und γ -Strahlung zusammengesetzten Strahlungsintensität läßt sich unter Vernachlässigung der kaum ins Gewicht fallenden Wirkung der weichen β -Strahler berechnen. Für die prozentualen Aktivitätsanteile der γ -Strahler und der harten β -Strahler ($E \geq 1$ MeV) findet man aus der Tab. 1 folgende Werte:

| Spaltprodukte | Summe der Atomprozente |
|-------------------------------------|------------------------|
| Alle 12 wirksamen Isotope | $0,61 = \Sigma$ |
| harte β -Strahler | $0,33 = \Sigma \beta$ |
| γ -Strahler | $0,45 = \Sigma \gamma$ |

Die prozentualen Aktivitätsanteile der harten β -Strahler und der γ -Strahler an dem ganzen Gemisch sind daher

$$\frac{\Sigma \beta}{\Sigma} = 0,55; \quad \frac{\Sigma \gamma}{\Sigma} = 0,74.$$

Unter σ wollen wir im folgenden die gesamte Aktivität der den verseuchenden Bodenbelag bildenden Isotopenmischung verstehen. Zur Berechnung der resultierenden Intensität müssen wir dann noch die in Tab. 4 angegebenen Werte von S mit dem Faktor 0,74 und jene der Tab. 5 mit dem Faktor 0,55 multiplizieren. Wir erhalten schließlich

Tabelle 6.

| | | | | |
|------------------------------|-----------------------|--------------|--------------|-----|
| Höhe | $y = 50$ | 100 | 150 | cm |
| γ -Strahlen | $S\gamma = 46 \sigma$ | 40 σ | 36 σ | r/h |
| β -Strahlen | $S\beta = 206 \sigma$ | 115 σ | 70 σ | r/h |
| Gesamtintensität | $S = 252 \sigma$ | 155 σ | 106 σ | r/h |

Es wird also z. B. bei einem Bodenbelag von 2 Curie je m^2 ($\sigma = 0,2$ mC/cm 2) gemäß Tab. 6 mit einer stündlichen Dosis von ca. 50 r für die unteren Extremitäten und ca. 30 r für die Körpermitte zu rechnen sein. Bei starker Männerkleidung, die die β -Strahlen absorbiert, reduziert sich allerdings dieser Wert auf etwa $\frac{1}{4}$ des angegebenen Betrages.

D. Die Toleranzdosis.

Über die maximal zulässige Strahlungsintensität, der Leute ausgesetzt sein dürfen, die in achtstündigem Arbeitstag mit Radium oder mit Röntgenstrahlen zu tun haben, gibt das Normblatt Din Rönt 4/1938 sowie der Erste Nachtrag zu den Unfallverhütungsvorschriften der Berufsgenossenschaft für Gesundheitsdienst und Wohlfahrtspflege, Berlin 1934, die entsprechenden Vorschriften. Mit Rücksicht auf die genetischen Schädigungen, die als Folge von strahlungserzeugten Mutationen der Gene auftreten (vgl. *Albers-Schönberg* [7], *H. J. Muller* [8], *L. J. Stadler* [9]), setzen diese Vorschriften fest, daß die Fortpflanzungsorgane mit nicht mehr als 0,025 r täglich bestrahlt werden dürfen. Noch

weiter geht *E. Haschè* [10], der für Männer unter 40 Jahren und Frauen unter 30 Jahren mit Rücksicht auf die Nachkommenschaft einen noch schärferen Maßstab anlegt und die Toleranz mit 0,01 r täglich festsetzen will.

Die Vorschriften in den angelsächsischen Ländern sind viel weniger weitgehend. Die Tab. 7 gibt eine Übersicht nach *W. Binks* [11].

Tabelle 7.

| Vorschreibende Behörde | Toleranzdosis |
|---|-------------------------------|
| International and British Committee | 0,25 r/d \approx 0,01 r/h |
| American Advisory Committee on X-Ray and Radium Protection | 0,1 r/d \approx 0,004 r/h |
| Berufsgenossenschaft für Gesundheitsdienst und Wohlfahrtspflege | 0,023 r/d \approx 0,001 r/h |

All diese Vorschriften sind nun auf das folgende Problem kaum anzuwenden, weil sie für den Fall bestimmt sind, daß jemand in Ausübung seines Berufes durch Jahrzehnte hindurch täglich etwa 8 Stunden lang der betreffenden Strahlung ausgesetzt ist. Wenn die von uns betrachtete Verseuchung mit Spaltprodukten für den verbrecherischen Kriegszweck tauglich sein soll, dann muß ihre Wirkung innerhalb eines Zeitintervalls von der Größenordnung der Halbwertszeit der betreffenden Isotopen, also rund innerhalb eines Monats, eintreten.

Für den hier vorliegenden Fall einer Allgemeinbestrahlung des ganzen Körpers beurteilt man die Dosis am besten auf Grund der gesamten vom Körper absorbierten Strahlung, die von *Mayneord* [12], der diesen Begriff eingeführt hat, als *Volumdosis* oder *Integraldosis* bezeichnet wird. Als Einheit der Integraldosis wird das Gramm-röntgen (abgekürzt gr; 1 Mgr = 10^6 gr) benützt, das gleich der von 1 g Luft bei der Bestrahlung mit 1 r absorbierten Energie ist. Die im menschlichen Körper bei einer von oben bis unten gleichförmigen Bestrahlung absorbierte Energie hängt von der Härte der Strahlen ab; die folgende Tab. 8 gibt nach *Mayneord* und *Clarkson* [13] die im menschlichen Körper normaler Größe (60 kg) aufgenommene Volumdosis je r Oberflächendosis für verschiedene Strahlenquellen an, deren Härte durch die Halbwertschicht ausgedrückt ist ($e^{-\mu x} = 1/2$).

Da das mittlere Durchdringungsvermögen der γ -Strahlen des Gemisches der wirksamen Spaltprodukte ungefähr zwischen dem einer 1000-kV-Therapieröhre und dem einer streng gefilterten Ra-Gammastrahlung liegt, können wir einen Wert von etwa 55 000 gr/r zur Berechnung der von der ersteren Strahlung erzeugten Volumdosis benützen. Dabei ist jedoch noch zu beachten, daß die zu den Angaben von Tab. 8 führenden Messungen nur mit einer einseitigen, d. h. von einer einzigen Strahlenquelle kommenden Bestrahlung des ganzen Körpers

vorgenommen wurde, während die Allgemeinverseuchung eine Bestrahlung von allen Seiten erzeugt. Deswegen hat man noch einen Faktor 2 anzubringen. Das bedeutet also:

Bei einer über die gesamte Oberfläche des Körpers applizierten Oberflächendosis von 1000 r beträgt die Volumdosis im Mittel

$$110 \cdot 10^6 = 110 \text{ Mgr.}$$

Die für den Menschen tödliche Volumdosis wurde zum Glück noch nicht ausprobiert; *Innes* [14] sagt darüber folgendes: "40 Mgr is nearly the upper limit and it is doubtful if many patients would survive 65 Mgr."

Tabelle 8. Verhältnis von Volumdosis zur Oberflächendosis für Strahlen verschiedener Härte.

| Strahlenquelle | Halbwertsschicht | Volumdosis je r Flächendosis |
|---------------------------------------|------------------|---------------------------------|
| 40-kV-Siemens-Therapieröhre . . . | 0,037 mm Cu | 13 000 gr/r |
| 200-kV-Philips-Therapieröhre . . . | 1,35 mm Cu | 46 000 gr/r |
| 1050-kV-Metrovic-Therapieröhre . . | 10.4 mm Cu | 51 000 gr/r |
| Ra-Gammastrahlen mit 1.3 Pt gefiltert | 16 mm Cu | 59 000 gr/r |

Der oben angegebene Wert ist nun nahezu das Doppelte davon und dürfte daher der tödlichen Dosis schon ziemlich nahekommen. Während also die lokale Dosis auf Bestrahlungsfelder bis zu ca. 1 dm² Fläche, wie die Erfahrung lehrt, bis zu etwa 10 000 r gesteigert werden kann, ist eine über die gesamte Körperoberfläche applizierte Dosis von 1000 r harter γ -Strahlung schon sehr gefährlich.

Allerdings treten in der Resistenz der Menschen gegenüber Strahlungseinwirkung erhebliche individuelle Schwankungen auf, und außerdem wird die Toleranzdosis um so größer, je geringer die Intensität ist und je größer daher der Zeitraum ist, über den sich die Strahlungseinwirkung erstreckt. Auf alle Fälle wird man aber damit rechnen können, daß eine auf den ganzen Körper verabreichte Dosis von 2000 r harter γ -Strahlen, die einer Volumdosis von ca. 220 Mgr entspricht, also mehr als das Fünffache des von *Innes* als „upper limit“ bezeichneten Wertes ausmacht, letal wirken müßte.

Die Verseuchung wird also dann ihren kriegerischen Zweck erfüllen, wenn die allseitig auf den Körper eingestrahlte Dosis 2000 r im Monat erreicht. Die in r gemessene Dosis D ist das Zeitintegral der in r/h gemessenen Strahlungsintensität. Bei der Berechnung der im Monat erreichten Dosis hat man nun zu beachten, daß S nicht zeitlich konstant ist, sondern nach einer Summe von e -Potenzen abklingt. Sei σ_0 die anfängliche Aktivitätsdichte, dann können wir angenähert setzen

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\lambda t},$$

wobei λ ein Mittelwert der Zerfallskonstanten ist. Es wird dann gemäß dem für $y = 100$ cm angegebenen Wert von Tab. 6:

$$S = 155 \sigma_0 e^{-\lambda t} \text{ r/h} \quad (13a)$$

und

$$D = 155 \sigma_0 \int_0^t e^{-\lambda t} dt = 155 \frac{\sigma_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \text{ r.} \quad (14)$$

Wir wollen die in einem Monat applizierte Dosis berechnen, wobei wir die mittlere Halbwertszeit der Aktivität ebenfalls angenähert gleich einem Monat setzen können. Dann wird der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (14) gleich $1/2$ und wegen des Zusammenhanges zwischen Zerfallskonstanten und Halbwertszeit: $\lambda T = \ln 2$ gilt dann

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{24 \cdot 30}{\ln 2},$$

wobei wir die Stunde als Zeiteinheit gewählt haben. Für die monatliche Dosis erhielte man sodann für den Fall dauernder Bestrahlung

$$D_m = \frac{155 \cdot 24 \cdot 30}{2 \ln 2} \sigma_0 = 80\,600 \sigma_0 \text{ r,} \quad (15)$$

wobei σ_0 in Millicurie je cm^2 auszudrücken ist. Es ist aber noch zu beachten, daß die in den Häusern befindlichen Menschen durch die Mauern mehr oder minder vor der Strahlung geschützt sind. Es sei τ jener Bruchteil von 24 Stunden, während dessen ein Mensch der Verseuchungsstrahlung ausgesetzt ist. Dann ist die Dosis, die er innerhalb eines Monats empfängt, in abgerundeten Zahlen gegeben durch

$$D_m = 80\,000 \tau \sigma_0. \quad (15a)$$

Unter der Voraussetzung, daß $D_m = 2000 \text{ r}$ die letale Dosis ist, ergibt sich als verhängnisvolle Aktivitätsdichte der Wert

$$\sigma_0 = \frac{1}{40 \tau} \text{ mCcm}^{-2} = \frac{1}{4 \tau} \text{ Cm}^{-2}. \quad (16)$$

Für achtstündige Arbeitszeit im Freien, die man z. B. bei Straßenarbeitern, Gärtnern, Bauarbeitern, Polizisten, Soldaten, Straßenbahnbefahrern usw. voraussetzen muß, hätte man $\tau = 1/3$ zu setzen. Daher ist

$$\sigma_0 = 0,075 \text{ mCcm}^{-2} = 0,75 \text{ Cm}^{-2},$$

eine Verseuchung, die alle diese Personen innerhalb eines Monats tödlich treffen würde. Die von dieser Aktivitätsdichte erzeugte Strahlungsintensität ist gemäß Tab. 6 $11,6 \text{ rh}$, das ist, wie ein Vergleich mit Tab. 7 zeigt, 11 600mal größer als die deutsche, 2900mal größer als die amerikanische und 1160mal größer als die internationale Toleranz.

Es werden zweifellos schon ernstliche Schädigungen an einem nicht unerheblichen Teil der Bevölkerung, namentlich an den in Holzbaracken lebenden und daher praktisch dauernd der γ -Strahlung ausgesetzten Personen auftreten, wenn die noch am wenigsten vorsichtige internationale Toleranz um das 200fache überschritten wird. Andererseits werden jene Leute, die sich den ganzen Tag über in dickwandigen Gebäuden aufhalten und wenig auf die Straße gehen, besser geschützt bleiben. Es ist allerdings zu beachten, daß die Fensterseiben die γ -Strahlung fast ohne Absorption durchlassen. Ferner ist in Kriegzeiten immer damit zu rechnen, daß die weibliche Bevölkerung in der Obsorge um das tägliche Brot im Durchschnitt mindestens etwa zwei Stunden im Freien zu verbringen hat. Man wird deswegen für den überwiegenden Teil der Bevölkerung den Koeffizienten η nicht unter $1/12$ herabsetzen können.

Da, wie man sieht, die Wirkung für verschiedene Bevölkerungsschichten ganz verschieden ausfällt, wollen wir drei Stufen der Verseuchung unterscheiden:

- Stufe 1: Rund 200facher Wert der internationalen Toleranzdosis. Schwere Gefährdung durch genetische Schäden, Erkrankung der in Baracken lebenden Menschen.
- Stufe 2: Rund 1000facher Wert der internationalen Toleranzdosis. Tödliche Erkrankungen von Leuten, die täglich 8 Stunden im Freien oder in Holzbaracken arbeiten.
- Stufe 3: Rund 3000facher Wert der internationalen Toleranzdosis. Völlige Sterilisierung der Bevölkerung, tödliche Bedrohung der überwiegenden Mehrzahl aller Bewohner.

Tabelle 9. Strahlungsintensität und Bodenbelag für die verschiedenen Verseuchungsstufen. Runde Werte.

| Verseuchungsstufe | S r/h | σ_0 mC/cm ² |
|-------------------|---------|-------------------------------|
| 1 | 2 | 0,013 |
| 2 | 10 | 0,07 |
| 3 | 30 | 0,2 |

E. Schädigung durch Inhalation.

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurde nur die Wirkung der von außen her kommenden β - und γ -Strahlungen berücksichtigt. Als weitere Gefahrenquelle für die Bewohner der verseuchten Gebiete kommt aber noch die Wirkung der inneren Bestrahlung hinzu, die dann eintritt, wenn die radioaktiven Substanzen durch Einatmen in den Körper aufgenommen werden. Denn an Stelle von Sand kann natürlich auch

Staub als Trägersubstanz für die radioaktiven Isotopen verwendet werden und kann sich noch wirksamer erweisen als Sand, weil er durch den Wind immer wieder vom Boden aufgewirbelt wird und in der Atmosphäre einige Zeit suspendiert bleibt, so daß er durch die Atemluft in die Lunge gerät, von wo dann der in Lösung gehende radioaktive Belag durch den Säftekreislauf an allen möglichen Punkten des Körpers abgelagert wird. Der Organismus erhält in diesem Falle nicht nur die Strahlung von außen, sondern auch von innen her und erhält dadurch früher die tödliche Dosis²⁾).

Nach den Angaben von *Binks* [11] zeigen klinische Untersuchungen, daß ein Radiumgehalt von $0,02\ \mu\text{g}$ bis $0,5\ \mu\text{g}$ im menschlichen Körper zwar noch keine Erkrankung nach sich ziehen muß, daß aber schwere Folgen schon bei einem Gehalt von $1,2\ \mu\text{g}$ beobachtet worden sind. Nun hat $1\ \mu\text{g}$ Ra Element im Gleichgewicht mit seinen acht Tochtersubstanzen eine Aktivität von $9\ \mu\text{C}$. Man wird deswegen damit rechnen müssen, daß die zulässige Grenze des Gehaltes an aktiven Substanzen im Körper etwa $10\ \mu\text{C}$ für den Fall praktisch konstanter Aktivität (Ra + Zerfallsprodukte) und dementsprechend ungefähr $100\ \mu\text{C} = 0,1\ \text{mC}$ für die Spaltprodukte mit rund einem Monat Halbwertszeit betragen dürfte.

Nun wiegt 1 Curie des Todesstaubes bei 0,5prozentiger Konzentration gemäß den Berechnungen von Abschnitt A rund 6mg; dementsprechend wiegt der Träger von $0,1\ \text{mC}$ nur $6 \cdot 10^{-7}\ \text{g}$, woraus sich ergibt, daß jeder schon ein Todeskandidat ist, der nur ein Milliontel Gramm des aktiven Staubes eingeatmet hat. Es ist dabei noch zu beachten, daß es überhaupt kein Mittel gibt, die radioaktiven Stoffe wieder aus dem Körper zu entfernen.

Wieviel nun jeweils von dem Todesstaub in der Luft suspendiert bleibt, hängt sehr stark von den Wind- und Bodenverhältnissen sowie auch von der Beschaffenheit (Größe und spezifisches Gewicht) der Staubkörner ab. Es liegen Messungen über den Gehalt der Großstadtatmosphäre an festen Aerosolen vor; für London schwanken die gemessenen Werte zwischen den Extremen $0,04\ \text{mg}/\text{m}^3$ (Sommersonntag um 4 Uhr morgens) und $3,2\ \text{mg}/\text{m}^3$ (Victoria Street am Spätnachmittag). Über Sandboden wird bei starkem Wind der Staubgehalt der Luft mehr als tausendmal so groß. *F. M. Erner* [17] gibt folgende Werte an:

²⁾ Staub eignet sich allerdings nicht zum direkten Abwurf, weil er infolge der niedrigen Senkungsgeschwindigkeit (rund 3 Wochen Falldauer je 1000 m Höhenunterschied bei $3\ \mu$ Korndurchmesser) zu stark der Abdrift durch die Luftströmungen unterworfen wäre. Aus diesem Grund müßte Staub z. B. in Kapseln von etwa Erbsengröße abgeworfen werden, die zusätzlich noch eine kleine Sprengladung enthalten, damit sie beim Aufschlagen auf den Boden detonieren.

| | | | |
|---|------|------|-------|
| Windstärke in m/s | 10 | 13 | 17 |
| Sandgehalt der Luft in g/m ³ | 1,69 | 4,77 | 10,36 |

Der Anteil an radioaktiven Aerosolen hängt natürlich von der Dichte des Bodenbelages sowie von den übrigen oben genannten Faktoren ab. Wir legen den nachstehenden Rechnungen die folgende Annahme zugrunde: Auf glattem Großstadtpflaster sei eine feine Staubschicht mit der Aktivitätsdichte $\sigma \text{ mC/cm}^2 = 0.1 \text{ } \mu\text{C/m}^2$ ausgebreitet. Dann kann man damit rechnen, daß in den unteren Atmosphärenschichten durch den aufgewirbelten Staub eine räumliche Aktivitätsdichte von $\rho \text{ mC/cm}^3 = 1000 \text{ } \mu\text{C/m}^3$ vorhanden ist, wobei

$$\rho \approx 2 \cdot 10^{-6} \sigma \quad (17)$$

ist. Das bedeutet, daß in einer 1 m dicken Luftschicht über dem Boden jeweils $\frac{1}{50000}$ der Menge der darunter auf dem Boden liegenden Staubschicht suspendiert ist. Bei Staub mit einem Korndurchmesser von 3μ und bei mittlerer Luftbewegung dürfte dieser Wert eher zu niedrig als zu hoch geschätzt sein.

Man hat gefunden, daß beim Einatmen von staubiger Luft Teilchen mit einem Durchmesser unterhalb von 1μ wieder vollständig ausgeatmet werden, während 80 % der Teilchen mit 3μ Durchmesser von den Atmungsorganen aufgefangen werden und im Körper verbleiben. Von Teilchen dieser Größe wird deswegen bei jedem Atemzug der Inhalt von 80 % des Atemvolumens, das ist der Inhalt von rund 1 Liter Luft, in den Körper aufgenommen.

Mit dem für die Verseuchungsstufe 3 angenommenen Wert der Aktivitätsdichte des Bodenbelags $\sigma = 0.2 \text{ mC/cm}^2$ wird $\rho = 2 \cdot 10^{-7} \text{ mC/cm}^3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mC/dm}^3 = 0.2 \text{ } \mu\text{C/dm}^3$. Wenn nun bei jedem Atemzug der Staubgehalt von einem Liter im Körper bleibt, wird bereits mit 500 Atemzügen, also in ca. einer halben Stunde, die tödliche Dosis eingeatmet. Die Heimtücke dieser Art von Vergiftung liegt darin, daß das betreffende Opfer überhaupt nichts davon verspürt, sondern erst nach einiger Zeit dahinzusiechen beginnt.

Die Waffe des radioaktiven Staubes ist daher noch viel wirksamer und gleichzeitig für den Angreifer selbst viel gefährlicher als der verseuchte Sand. Bei der kleinsten Unvorsichtigkeit in der Herstellung des radioaktiven Staubes könnte die gesamte Umgebung der Produktionsstätten sehr ernstlich gefährdet werden. Wie aus dem nächsten Abschnitt hervorgeht, würde in Anlagen, die nur einen geringen Bruchteil des gesamten Weltbedarfes an elektrischer Energie aus Atomkraftwerken erzeugen, die anfallende Menge der wirksamen Spaltprodukte in die Billionen von Millicurie gehen, die zur tödlichen Vergiftung der ganzen Menschheit ausreichen würden. Die Herstellung von mit radioaktiven Isotopen imprägniertem Staub würde daher einem Großstaat ein Ver-

nichtungsmittel liefern, das so fürchterlich ist, daß es schon bei kleinen Defekten des Produktionsmechanismus die eigene Bevölkerung schwer bedrohen würde. Man sollte deswegen auch große Atomkraftwerke womöglich nur in abgelegenen Gegenden — wie dies in Hanford der Fall ist — und mit ganz besonderen Vorsichtsmaßnahmen errichten.

F. Die Größe der verseuchbaren Fläche auf Grund des zu erwartenden Ausbaus von Atomkraftwerken.

Die Größe der Fläche, die mit einer Anfangsaktivität von σ_0 mC/cm² belegt werden kann, ergibt sich aus Gl. (1) zu

$$F = \frac{5 \cdot 10^{11}}{\sigma_0} N \text{ cm}^2 = \frac{50 N}{\sigma_0} \text{ km}^2, \quad (18)$$

wobei σ_0 die in mC/cm² gemessene Aktivitätsdichte ist und N die in GW (= 10⁶ kW) gemessene kalorische Leistung aller Atomkraftwerke ist, deren gesamtes Gleichgewichtsquantum von wirksamen Spaltprodukten über die Fläche F gleichmäßig verstreut wird. Die zu verschiedenen Verseuchungsstufen gehörigen Werte von σ_0 können aus der Tab. 8 abgelesen werden. Für eine fortlaufende monatliche Verseuchung wäre dagegen nach Gl. (5) zu setzen

$$F = \frac{25 N}{\sigma_0} \text{ km}^2. \quad (19)$$

Mit welcher kalorischen Leistung N wird man nun in den nächsten Jahrzehnten rechnen können?

Gegenwärtig steht zwar schon eine ganze Anzahl von Uranbatterien in Betrieb, aber eine nennenswerte Leistung scheinen nur die großen zur Plutoniumgewinnung dienenden Batterien der Hanford-Werke zu haben, von denen nach *Smyth* im Sommer 1945 bereits drei in Betrieb gestanden sind. Ihre Gesamtleistung dürfte der Größenordnung nach etwa $N = 1$ sein.

Eine wesentliche Erhöhung dieser Zahl wird wohl erst eintreten, wenn einmal die Kernspaltung in industriellem Ausmaß zur Energiegewinnung benützt wird. Alle diesbezüglichen Anlagen befinden sich heute noch im Versuchsstadium, und man wird etwa damit rechnen können, daß in der zweiten Hälfte der fünfziger Jahre größere Atomkraftwerke in Betrieb kommen und daß dann ab 1960 ein ziemlich steiler Anstieg der Energiegewinnung durch Kernreaktionen eintreten wird. Man dürfte mit der Schätzung nicht weit fehlgehen, daß in zwei bis drei Jahrzehnten vielleicht ein Fünftel der Energieproduktion in hochindustrialisierten Ländern auf Atomkraftwerke umgestellt sein könnte.

Über die Größenordnung der Elektrizitätserzeugung in den größeren Ländern orientiert die Tab. 10, die in abgerundeten Zahlen einen Aus-

zug aus den Angaben des statistischen Jahrbuches der Weltkraftkonferenz [15] bringt.

Tabelle 10. Übersicht über die Elektrizitätserzeugung. Installierte Leistungskapazität in GW.

| Land | Elektrizitätswerke | | Industrie-Kraftwerke | | Summe | |
|------------------|--------------------|------|----------------------|------|--------|------|
| | 1935 | 1936 | 1935 | 1936 | 1935 | 1936 |
| Deutschland . . | 8,4 | | 5,8 | | 14,2 | |
| Großbritannien . | 8,1 | | | | | |
| Sowjetunion . . | 6,9 | | | | | |
| Kanada | 5,3 | | 1,3 | | 6,6 | |
| USA. | 34,0 | 34,7 | | | > 40,0 | |
| Japan | 5,1 | 5,8 | 0,6 | 0,7 | 5,7 | 6,5 |
| Frankreich . . | 7,4 | 7,5 | 3,2 | 3,4 | 10,6 | 10,9 |

Für die in der Tab. 10 leergelassenen Felder lagen in dem 1938 veröffentlichten Jahrbuch keine Angaben vor.

Die Produktion zeigt schon in den dreißiger Jahren einen deutlichen Anstieg, der während des Krieges natürlich noch steiler in die Höhe ging. Die installierte Leistungskapazität in den Elektrizitätsversorgungsunternehmen samt den Industriekraftwerken dürfte in den USA. im Jahre 1960 den Wert von $N = 60$ wohl schon überschritten haben, so daß man für das erwartete Fünftel, das auf Atomkraftwerke entfällt, etwa $N = 12$ GW elektrische Leistung ansetzen kann. Unter der Annahme eines 33prozentigen Wirkungsgrades könnte die kalorische Leistung solcher Werke für die USA. in den sechziger Jahren mit etwa

$$N = 36 \text{ GW} \quad (20)$$

veranschlagt werden.

Die Tab. 11 gibt die unter dieser Voraussetzung berechnete Größe der auf die verschiedenen Verseuchungsstufen zu bringenden Flächen an.

Tabelle 11. Verseuchbare Fläche für $N = 36$ GW:

- a) mit dem bei Kriegsausbruch aufgespeicherten Material;
b) mit dem allmonatlich nachgelieferten Material.

| Verseuchungsstufe | a | b |
|-------------------|-------------------------|------------------------|
| 1 | 140 000 km ² | 70 000 km ² |
| 2 | 26 000 km ² | 13 000 km ² |
| 3 | 9 000 km ² | 4 500 km ² |

Das Ergebnis ist, daß ein hochindustrialisiertes Land, wie z. B. USA., nach Umstellung von einem Fünftel seiner Elektrizitätsproduktion auf Atomkraftwerke auch bei völligem Verzicht auf Atombomben in der Lage sein wird, Gebiete von einer Flächenausdehnung praktisch

unbewohnbar zu machen, die größer ist als die Summe der Flächeninhalte aller Groß- und Kleinstädte eines großen Staates. Der besondere militärische Wert des verbrecherischen Kriegsmittels der radioaktiven Verseuchung liegt darin, daß die feindlichen Wohnstätten und Industrieanlagen so gut wie intakt erhalten bleiben, während die Menschen entweder vertrieben oder getötet werden.

Die Fortschritte der Kultur liefern die Mittel, um in einem nächsten Weltkrieg die Bevölkerung Mitteleuropas zu vertilgen, ohne daß ein Schuß fällt. Die Pflicht aller denkenden Menschen ist es, für eine der neuen Sachlage entsprechende Änderung der Methoden der Weltpolitik zu sorgen.

Der Leiterin des Wiener Radiuminstitutes *Bertha Karlik* sowie Herrn *Engelbert Broda* spreche ich für wertvolle Ratschläge und für die Beschaffung des Literaturmaterials meinen herzlichsten Dank aus.

Literatur.

- [1] *H. D. Smyth*, Atomic Energy for Military Purposes, Princeton University Press, 7. Aufl. 1947.
- [2] *J. M. Siegel*, Journ. Am. Chem. Soc. **68**, 2411—1442 (1946).
- [3] *Nature* **160**, 778 (1947), Nr. 4075.
- [4] *St. Meyer* und *E. Schueidler*, Radioaktivität, Verlag Teubner, Leipzig 1927.
- [5] *W. Minder*, Radiumdosimetrie, Verlag Springer, Wien 1941.
- [6] *E. Jahnke* und *F. Emde*, Funktionentafeln, 2. Aufl., Verlag Teubner, Leipzig 1938.
- [7] *H. E. Albers-Schönberg*, Münch. Med. Wochenschr. **50**, 1859 (1903).
- [8] *H. J. Muller*, Science **66**, 84 (1927); **67**, 82 (1928).
- [9] *L. J. Stadler*, Science **68**, 186 (1928).
- [10] *E. Hasché*, Strahlenschutz und Dosierungstafeln, Berlin 1943.
- [11] *W. Binks*, Brit. Med. Bull. **4**, 58—64 (1946).
- [12] *W. V. Mayneord*, Brit. J. Radiol. **13**, 235 (1940).
- [13] *W. V. Mayneord* und *J. R. Clarkson*, Brit. J. Radiol. **17**, 177 (1944).
- [14] *G. S. Innes*, Brit. Med. Bull. **4**, 51—58 (1946).
- [15] Statistical Year-Book of the World Power Conference, London 1938.
- [16] *H. Smereker* und *K. Juris*, Strahlentherapie **52**, 327 (1935).
- [17] *F. M. Ezner*, Handbuch der Klimatologie, Bd. 1.

Buchbesprechungen.

A Text-Book of Practical Physics. Von *H. S. Allen* und *H. Moore*. Dritte Auflage. Mit 336 Textabb., XV, 591 S. London: Macmillan & Co., Ltd. 1948.

Die vorliegende 3. Auflage des bekannten englischen Lehrbuches der Physik dient hauptsächlich dem Studium für Hörer an technischen Hochschulen sowie für Medizinstudenten. Im ersten Teil werden die Eigenschaften der Materie behandelt sowie die wichtigsten Experimente hierfür beschrieben. Der zweite Teil ist dem Schall gewidmet und behandelt den Frequenzbegriff, die Resonanz sowie einige Apparate zu ihrer Bestimmung. Der dritte Teil befaßt sich mit dem Licht und bringt nach Zusammenfassung der Gesetze der geometrischen Optik die Theorie der Linsen, der optischen Instrumente, der Spektren und Photometrie. Dann behandelt der Autor im vierten Teil die Wärme und im fünften Teil den Magnetismus. Den Abschluß des Buches bildet der sechste Teil, welcher der Elektrizität gewidmet ist. Hier schließt sich ein Anhang der wichtigsten physikalischen Konstanten und einige mathematische Tabellen an. Druck und Ausführung des Werkes ist friedensmäßig, das Buch kann für die eingangs erwähnten Zwecke bestens empfohlen werden.

P. Urban, Graz.

Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century. Von *A. E. Bell*. Mit 61 Textabb., 220 S. London: E. Arnold & Co. 1947.

Das Werk stellt neben einer Biographie des bekannten Gelehrten auch die physikalischen Erkenntnisse seines Zeitalters dar. Es gestattet dem Leser, sich auch einen guten Überblick über den damaligen Stand der Naturwissenschaften zu verschaffen, und wird sowohl Studierenden als auch Wissenschaftlern eine wertvolle Bereicherung ihrer historischen Kenntnisse auf ihrem Fachgebiete vermitteln.

P. Urban, Graz.

L'Optique Électronique. Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de *L. de Broglie*. (Éditions de la revue d'optique théorique et instrumentale.) Paris: 1946.

Als zweiter Band der „Collection des Réunions et mises au point“ (der erste Band behandelte das Meson) ist die Vortragsreihe über Elektronenoptik erschienen, welche unter dem Vorsitz von *Louis de Broglie* im Mai und Juni 1946 in Paris abgehalten worden ist. Die Vorträge geben einen klaren Überblick über die Arbeiten, welche in Frankreich seit 1942 auf elektronenoptischem Gebiete durchgeführt worden sind. Die dabei erzielten Leistungen sind bereits ganz beachtlich und lassen weitere schöne Ergebnisse erwarten. Der Vortrag des berühmten Begründers der Wellentheorie der Elektronen eröffnet die Reihe mit einem großzügigen Überblick über die Problemstellung, in welchem vor allem die Beziehung zwischen den Prinzipien von *Fermat* und *Maupertuis*, also die sog. mechanisch-optische Analogie, dargestellt wird, deren weittragende Bedeutung ja gerade *de Broglie* schon im Jahre 1924 in seinen klassischen „Untersuchungen zur Quantenmechanik“ so gründlich herausgearbeitet hat, daß Schrödinger darauf sein großes Lebenswerk aufbauen konnte. Interessant ist eine historische Bemerkung auf S. 16: „L'optique électronique aurait pu avoir en France son développement initial. Dès 1927-28, je signalais à l'un des mes premiers élèves l'intérêt qu'il y aurait à développer l'optique géomé-

trique des électrons. Malheureusement, il n'a pas poursuivi son travail dans cette direction et moi-même, absorbé par des recherches plus générales sur la mécanique ondulatoire, je n'ai pas approfondi ces questions." Wer die Originaluntersuchungen von *de Broglie*, in denen die Wellenmechanik begründet worden ist, gelesen hat, wird von dieser Mitteilung nicht überrascht sein. Es ist daher besonders merkwürdig und zeigt wieder einmal, wie gewisse Ideen zu einer bestimmten Zeit notwendig zutage treten, daß *H. Busch* von einer rein technischen Frage her auf die Elektronenoptik gestoßen ist, ohne von den Gedanken „*de Broglies*“ zu wissen oder etwa von der allgemeinen mechanisch-optischen Analogie geführt worden zu sein.

Es sind im wesentlichen vier Entwicklungsstellen, die sich in Frankreich mit der praktischen Elektronenoptik befassen: die von *P. Grivet* bei der Compagnie Générale de T. S. F. geführte Forschergruppe, das Laboratoire de Physique am Collège de France unter *C. Magnan* und seinen Mitarbeitern, der Physiker *F. Dupouy* an der Faculté des sciences von Toulouse und der Pariser Astronom *A. Lallemant*. Auf theoretischem Gebiet sind die Arbeiten von *Louis Cartan* zu nennen, dessen Leben leider während der Okkupation ein so tragisches Ende gefunden hat, und die großzügigen Arbeiten von *Maurice Cotte*. Im zweiten Vortrag berichtet *Claude Magnan* über die Anwendungen der Elektronenoptik zur Konstruktion eines elektrostatischen Ionenmikroskops, das wegen der 2000 mal größeren Masse der abzubildenden Teilchen ein etwa 40 faches Auflösungsvermögen gegenüber dem Elektronenmikroskop erwarten lassen soll. (Dies würde allerdings die Gültigkeit der Abbeschen Auflösungsformel und damit ein aberrationsfreies Objektiv voraussetzen. Bei Berücksichtigung des unvermeidlichen Öffnungsfehlers käme man im günstigsten Falle, d. h. wenn man den größeren chromatischen Fehler der Ionenabbildung bei der Objektdurchstrahlung unberücksichtigt läßt, höchstens auf eine Verbesserung um den Faktor 0,4. Anm. d. Ref.) *Lallemant* bespricht seine Versuche zur Konstruktion eines Bildwandlers zur Lichtverstärkung von astronomischen Aufnahmen, *E. Fauré-Frémiet* vom Collège de France behandelt die Anwendungen der Elektronenmikroskopie auf die Biologie der Zellen und Bakterien. *Paul Chanson* berichtet über die optischen Konstanten elektrostatischer Elektronenlinsen, wobei einige interessante empirische Brennweitenformeln angegeben werden. Messungen im elektrolytischen Trog und die Berechnung elektrostatischer Linsen behandelt *André Ertaud*. Über den Bau eines kommerziellen elektrostatischen Elektronenmikroskops bei der Compagnie Générale de T. S. F. berichtet *Pierre Grivet*. *Gaston Dupouy* behandelt die Konstruktion eines magnetischen Übermikroskops an der Universität Toulouse. Und schließlich gibt *L. Léauté* einen Überblick über die Anwendungen der Elektronenmikroskopie auf die Metallographie. Das Buch, welches so die Entwicklung der Übermikroskopie bis zum Jahre 1946 in Frankreich in erschöpfender Weise darstellt, wird von allen Fachgenossen auch der anderen Länder wärmstens begrüßt werden.

W. Glaser, Wien.

Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Von *J. J. Burckhardt*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gesamtgebiete der exakten Wissenschaften: Mineralogisch-Geotechnische Reihe: Band II.) Mit 56 Textabb., 186 S. Basel: E. Birkhäuser. 1947. sfr 24.50, geb. sfr 29.—

Das vorliegende Buch, das bis in die modernen Probleme der mathematisch-gruppentheoretischen Kristallographie hineinführt, ist doch so angelegt, daß es bei sorgfältiger Lektüre auch vom Anfänger verstanden werden kann. Neben dem Äquivalenzproblem der Kristallklassen lernt der Leser die mathematische Ableitung der Bewegungsgruppen der Ebene und des Raumes kennen. Das Buch führt bis zur Betrachtung der Bewegungsgruppen in n Dimensionen und besitzt ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Dem Mathematiker wird die Lektüre infolge der klaren Darstellung besonders zusagen, dem Physiker eröffnet sich für ein ihm wichtiges Gebiet ein neuer Zugang.

F. Schwarzl, Graz.

Introduction to Electron Optics. The Production, Propagation and Focussing of Electron Beams. Von V. E. Cosslett. Oxford: At the Clarendon Press. 1946.

Überall dort, wo es auf die Führung und Fokussierung von Elektronenstrahlbündeln ankommt, spielen elektronenoptische Methoden eine entscheidende Rolle. Dies ist daher bei allen Elektronengeräten der wissenschaftlichen und technischen Elektronik der Fall. Aus diesem Grunde hat sich innerhalb der letzten zwanzig Jahre die junge Wissenschaft der Elektronenoptik im Rahmen der allgemeinen Elektronenphysik eine führende Stelle erobert. Wer ein verlässliches Buch braucht, das ihn ohne Umschweife und mit einem geringen Aufwand an zünftigen Rüstzeug in dieses interessante Arbeitsgebiet einführen soll, wird am zweckmäßigsten zu dem Werk von Cosslett greifen. Es ist aus Vorlesungsreihen entstanden, die der Verfasser mehrmals in Oxford für „Untergraduierte“ in ihrem Abschlußjahr gehalten hat. Es kommt der Darstellung sehr zugute, daß der Verfasser so wiederholt Gelegenheit hatte, die Aufnahmefähigkeit für die einzelnen Teilgebiete an seinen Hörern praktisch zu erproben. Das Buch behandelt nach einem einleitenden Kapitel über spezielle Elektronenbahnen und -felder zunächst die allgemeinen Grundtatsachen der elektrischen und magnetischen Fokussierung, bringt eine gedrängte Darstellung der Bildfehlertheorie, gibt einen Überblick über die Herstellungsarten der Elektronenstrahlen und über die verschiedenen Elektronengeräte nach elektronenoptischen Gesichtspunkten: Elektronenstrahler, Bildwandler, Vervielfacher, Oszillographen, Fernseh-Empfangs- und Senderöhren, Elektronenmikroskope, Betastrahlspetrographen, Magnetron, Cyklotron, Betatron, Massenspektrographen, ferner über Phasenfokussierung, Klystron und andere Röhren mit Geschwindigkeitsmodulation werden erwähnt. Ein Schlußkapitel bringt die Hamiltonschen Methoden der Elektronenoptik. Von allem werden jeweils nur das Grundprinzip und die leitenden Gedanken erläutert und für die Weiterbildung am Kapitelschluß die maßgebende Literatur angeführt. Auf diese Weise erhält der Leser den notwendigen Überblick und das erforderliche Gedankengerüst, in welchem er später alle Einzelkenntnisse unterbringen kann. Das wohlgelungene Buch ist daher den Hörern unserer Universitäten und Technischen Hochschulen ebenso wie den an der Elektronenoptik interessierten Fachleuten bestens zu empfehlen.

W. Glaser, Wien.

Atomic Energy being The Norman Wait Harris Lectures delivered at Northwestern University. Von K. K. Darrow. Mit 13 Textabb., 80 S. New York: J. Wiley & Sons, Inc. — London: Chapman & Hall, Ltd. 1948. \$ 2. —.

Der bekannte amerikanische Autor gibt in den vorliegenden vier Vorlesungen über Atomenergie einen guten Überblick, ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen. Trotz der Abstraktheit der gegenwärtigen Theorien kann der Versuch als gelungen angesehen werden und gehört das Werk zu den besten populären Darstellungen der Gegenwart.

P. Urban, Graz.

Die philosophischen Grundlagen der wissenschaftlichen Erkenntnis. Von A. Fischer. VI, 240 S. Wien: Springer-Verlag. 1947. S 30.—, sfr 18.—, \$ 4.20.

Das flüssig geschriebene Werk will kein in sich geschlossenes System einer bestimmten philosophischen Lehrmeinung zur Darstellung bringen, sondern die Grundlagen der Erkenntnis nach dem Stand der neuesten Forschungsergebnisse kurz, aber dabei gründlich beleuchten. In der Gegenwart, wo für jeden geistig und ethisch strebenden und ringenden Menschen eine zuverlässige Übersicht über das Gebiet der Erkenntnistheorie und die damit im Zusammenhang stehenden Probleme von großer Wichtigkeit ist, schließt das Werk des Autors eine bisher schmerzlich empfundene Lücke in dankenswerter Weise. Wenn man auch im einzelnen über verschiedene

Fragen anderer Meinung sein kann, so wird man doch das Buch nicht ohne tiefgehende Anregung aus der Hand legen. Die Ausstattung, die der Springer-Verlag dem Werke angedeihen ließ, ist solid und den jetzigen Umständen angemessen.

P. Urban, Graz.

Cosmic Rays and Nuclear Physics. Von L. Jánossy. Mit 131 Textabb., XIV, 186 S. London: The Pilot Press Ltd. 1948.

Der Autor, welcher eine der führenden Autoritäten auf dem Gebiete der Forschung über kosmische Strahlen ist, bringt in übersichtlicher Weise einen Abriß der komplizierten Phänomene der kosmischen Strahlung. Die rapide Entwicklung dieses wichtigen Gebietes der modernen Physik macht es notwendig, eine übersichtliche Darstellung der Untersuchungsmethoden und experimentellen Ergebnisse, sowohl für den praktischen als wie auch für den theoretischen Physiker, zu geben. Nach einer kurzen Einführung in die wichtigsten Grundbegriffe der Theorie der Elementarteilchen und einem historischen Überblick über die Entdeckung der kosmischen Strahlen werden die Eigenschaften derselben auf Grund der Experimente erörtert. Hierauf folgt ein Überblick über die Verwendungsmöglichkeiten der Ionisierungskammer und des Geiger-Müller-Zählers sowie der Nebelkammer und ihrer Anwendung auf die Forschung der kosmischen Strahlung. Dann behandelt der Autor die Natur der Partikel, welche in der kosmischen Strahlung auftreten, gibt eine Analyse derselben aus den Aufnahmen mit der Nebelkammer und beschreibt die Entdeckung des positiven Elektrons und des Mesons. In den folgenden zwei Kapiteln wird die Theorie der weichen Komponenten mit den vorliegenden Experimentergebnissen verglichen. Dann folgt ein kurzer Abriß über den Atomkern und die Theorie des Mesons sowie ein Ausblick auf die zukünftige Entwicklung der modernen Physik. Im nächsten Kapitel wird dann die Instabilität des Mesons behandelt und entsprechende Folgerungen für die Lebensdauer gezogen. Die restlichen Kapitel des Buches behandeln die Beeinflussung der kosmischen Strahlen durch das Magnetfeld der Erde und die geomagnetischen Effekte und ihre Interpretation sowie die durchdringenden Schauer und die Herkunft der Mesonen. Den Abschluß bildet ein Ausblick auf die zukünftige Entwicklung der kosmischen Strahlenforschung sowie eine Zusammenfassung ihrer Entwicklung in den letzten 30 Jahren.

Darstellung und Ausstattung des kleinen Werkes ist als mustergültig zu bezeichnen und kann es jedem Physiker zur Einarbeitung in dieses wichtige Gebiet wärmstens empfohlen werden.

P. Urban, Graz.

Laufzeittheorie der Elektronenröhren. Von H. W. König. Erster Teil: Ein- und Mehrkreissysteme. Mit 72 Textabb., XII, 210 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 78.—, sfr 36.—, § 8.40.

Die exakten theoretischen Untersuchungen über die Wirkungsweise von Laufzeitröhren, d. h. von Entladungsstrecken, bei welchen die Laufzeit der Elektronen vergleichbar mit der Periodendauer der an den Gittern fließenden Wechselströme ist, wurden, soweit es das ebene Problem betrifft, durch eine grundlegende Arbeit von J. Müller (Elektronenschwingungen im Hochvakuum, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 1933) eröffnet. Dieser berücksichtigt erstmalig unter Zugrundelegung der Maxwell'schen Theorie den Einfluß der Raumladung auf den Bewegungsmechanismus der Elektronen in der Entladungsstrecke. In weiterer Folge waren es dann F. Borgnis und E. Ledinegg (1943), welche die Wirkung der Raumladung für ein klystronartiges Gebilde untersuchten und deren kompensierende Wirkung auf den Influenzstrom strenge nachwiesen. Gleichzeitig erschien eine Arbeit von H. W. König (Über das Verhalten von Elektronenströmen im elektrischen Längsfeld, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 1943), welche die Untersuchungen von Müller auf ein System mehrerer Entladungsstrecken ausdehnte; während die erstgenannten Autoren zur Integration

der Grundgleichungen sich der substantiellen Darstellung bedienen, welche ganz zwanglos die „Laufwinkelgleichung“ ergibt, bevorzugt *König* die lokale Darstellung, die zur Integration eines simultanen Systems zweier partieller Differentialgleichungen führt, welche in der genannten Arbeit sehr elegant nach einer von *Courant* angegebenen Methode gelöst werden. Freilich bedeutet dieses Verfahren in einem gewissen Sinne einen Umweg, da zur expliziten Darstellung des elektrischen Feldes und der Elektronengeschwindigkeit ein Parameter eingeführt werden muß, der den Übergang zur substantiellen Darstellung wiederherstellt. Die genannte Arbeit von *H. W. König* bildet die Grundlage zu seinem jetzt erschienenen Buche „Laufzeittheorie der Elektronenröhren“, 2 Bände, deren erster Teil hier zunächst zur Diskussion steht.

Der erste Band behandelt vom einfachsten Falle einer Vorbeschleunigungsstrecke, welcher sich die eigentliche Entladungsstrecke anschließt, ausgehend, der Reihe nach kompliziertere Systeme, denen sich alle mit ebenen Gittern ausgerüstete Laufzeitröhren ohne Magnetfeld unterordnen lassen, in eingehender und, soweit es die linearen Effekte betrifft, auch in mathematisch exakter Weise. Die einzelnen Kapitel sind nach der Kammerzahl der behandelnden Entladungsstrecken sowie nach der Zahl der an den Gittern gelegten äußeren Stromkreise geordnet. Aus der großen Zahl der behandelten Entladungsstrecken seien hier folgende charakteristische Röhrentypen, welche sich alle dem vorgenannten Einteilungsschema unterordnen lassen, herausgegriffen: der von *Müller* und *Rostas* angegebene Hohlraumgenerator, welcher durch das Zusammenfallen der Steuer- und Arbeitsstrecke charakterisiert ist (Einkreis-Einkammersystem; 1. Kapitel), ferner die Triode (Zweikreis-Zweikammersystem; 2. Kapitel) und dann als Exponenten der Zweikreis-Dreikammersysteme der *Heilsche* Generator (3. Kapitel) und die Klystronröhre; die Theorie der Schirmgitterröhre fällt als Erweiterung des Dreikammersystems in das Schema der Dreikreis-Dreikammerentladung und wird ebenfalls im 3. Kapitel behandelt. Schließlich werden im 4. Kapitel die Vierkammersysteme untersucht.

Gemäß den Ausgangsgleichungen, in welchen nur die Laufwinkel der stationären Entladung und die Gitterfeldstärken als Konstante eingehen, werden außer der früher erwähnten Kammereinteilung zur Charakterisierung der Röhre diese sich natürlich ergebenden Bestimmungsstücke herangezogen, aus welchen sich dann die „äußeren“ Bestimmungsstücke der Röhre (angelegte Gleichspannungen sowie Gitterabstände) als abgeleitete Größen berechnen lassen.

Die vom Verfasser so weitgehend explizite durchgeführte Berechnung der Laufzeitvorgänge sowie die Anwendung der Vierpoltheorie, welche als besonders geglückt zu bezeichnen ist, konnten naturgemäß nur durch eine rigorose Linearisierung der entsprechenden Gleichungen ermöglicht werden. So mußten nicht nur die Amplituden der induzierten Gitterströme, sondern auch alle Terme, in welchen die Amplituden mit der Kreisfrequenz und der Laufzeit in multiplikativer Verbindung stehen, sehr klein gewählt werden; letztere Forderung führt dazu, daß die Ergebnisse nur für entsprechend kurze Laufzeiten exakt anwendbar sind, um bei längeren Laufwinkeln mehr oder weniger unbrauchbar zu werden. Es werden also die angegebenen Formeln z. B. für Wirkungsgradberechnungen nicht geeignet sein, während sie zur Bestimmung des Anfachgebietes bei Rückkopplungsschaltungen auch im Falle großer Laufwinkel sicherlich zuständig sind.

Mit dem Vorzug des Buches, nur eigene Arbeiten des Verfassers zu enthalten, was eine in sich geschlossene Darstellung ermöglicht, verbindet sich auf der anderen Seite eine Abgrenzung des Stoffes, welche durch den Titel des Buches nicht ganz gerechtfertigt erscheint. So fanden die Arbeiten anderer Autoren über die Laufzeittheorie konzentrischer Systeme und der Magnetfeldröhren keine Berücksichtigung.

E. Ledinegg, Graz.

Functions of a Complex Variable. Von *Th. M. MacRobert*. Dritte Auflage. Mit 83 Textabb., XV, 390 S. London: Macmillan & Co., Ltd. 1947.

Dieses Werk ist Studenten gewidmet, welche bereits eine gewisse Kenntnis der Differential-Integral-Rechnung erlangt haben und sich wünschen, mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabel vertraut zu machen, sowie mit den hauptsächlichlichen Anwendungen dieser Theorie. In knapper und prägnanter Form werden sämtliche Theoreme der Funktionentheorie sowie eine große Zahl von Beispielen behandelt, welche es ermöglichen, mit dem Stoff besonders vertraut zu werden. Dieses Werk ist für Studierende der theoretischen Physik empfehlenswert, da besonders in der modernen Atomphysik die Methoden der komplexen Funktionentheorie eine große Rolle spielen. Druck und Verlag des Werkes sind zufriedenstellend.

P. Urban, Graz.

Von der Lupe zum Elektronenmikroskop. Von *H. Plenck*. Mit 16 Textabb., 67 S. Wien: F. Deuticke. 1948. S 8.—.

Der Verfasser beginnt mit der Erklärung der mikroskopischen und submikroskopischen Maßeinheiten und einer allgemein verständlichen Einführung in die Grundlagen der geometrischen Optik. Hierauf folgt nach der Beschreibung der einfachen Lupe die Entwicklung und Betrachtung des modernen Mikroskops mit Erwähnung der Linsenfehler und seiner Leistungsgrenze. Das Buch schildert die Versuche zur Erhöhung der Auflösungsfähigkeit und gipfelt in der Beschreibung des Elektronenmikroskops und seiner physikalischen Grundlagen. Gleichzeitig wird versucht, dem Leser die mikroskopische und submikroskopische Welt zu erschließen.

Der Laie lernt neben den verschiedenen modernen Mikroskopen und ihrer Technik auch einen großen Teil moderner Physik auf leicht verständliche Art kennen. Aber auch dem Physiker wird das Büchlein manche ihm unbekannte, interessante technische Einzelheit bieten.

F. Schwarzl, Graz.

Nuclear Physics in Photographs. Tracks of Charged Particles in Photographic Emulsions. Von *C. F. Powell* und *G. P. S. Occhialini*. Mit 16 Textabb. und 50 Bildtafeln, XII, 124 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1947.

Die Autoren bringen in dem genannten Werke die wichtigsten Versuchsergebnisse der Methode der direkten Photographie, welche in der letzten Zeit große Fortschritte erzielt hat. Fast alle wichtigen Kernprozesse werden eingehend behandelt und durch hervorragende Aufnahmen illustriert. Gerade durch die Tafeln wirkt die Darstellung sehr instruktiv und vermittelt auch dem Theoretiker Einblick in die Werkstätte des Experimentators. Der letztere wird wiederum mit den komplizierten Methoden der heutigen Kernforschung vertraut gemacht und kann seine Kenntnisse um dieses wertvolle Verfahren bereichern.

Die Ausführung ist friedensmäßig und sehr übersichtlich gestaltet.

P. Urban, Graz.

Vorlesungen über Kernphysik. Von *Th. Sexl*. Mit Textabb., VII, 177 S. Wien: F. Deuticke. 1948. S 35.—, geb. S 45.—.

Die Vorlesungen über Kernphysik von *Th. Sexl* werden von allen Studierenden der theoretischen Physik auf das wärmste begrüßt. Existieren doch gerade auf diesem Gebiete fast keine Werke, welche den ganzen Problemkreis behandeln, ohne daß der Leser gezwungen ist, auf die außerordentlich angewachsene Zeitschriftenliteratur zurückzugreifen.

Der Verfasser behandelt in zehn Vorlesungen jene Probleme der Kernphysik, die sich auf das Einkörperproblem beziehen und welche entweder streng oder wenigstens in erster Näherung als solche behandelt werden können. Die erste Vorlesung ist der Theorie der *Rutherford*-Streuung auf Grund der *Newtonschen* Mechanik gewidmet, ein Problem, dem dann in

der zweiten Vorlesung die wellenmechanische Behandlung gegenübergestellt wird. In der dritten Vorlesung wird die Theorie der *Laplaceschen* Differentialgleichung behandelt, deren genaue Kenntnis immer wieder erforderlich ist und zu welcher der Verfasser einige wichtige Beiträge gegeben hat. Die vierte Vorlesung enthält die Entwicklung der in der zweiten Vorlesung gewonnenen Lösung in geschlossener Form nach Kugelfunktionen auf Grund einer noch nicht veröffentlichten Arbeit des Verfassers. Hiermit sind die exakten Grundlagen für die im folgenden behandelten Streuprobleme bereitgestellt. In der fünften Vorlesung werden die physikalischen Betrachtungen mit der Theorie der Streuung gleichartiger Teilchen wiederaufgenommen. Es wird die von *Darwin* im Jahre 1914 gegebene Behandlung des Problems auf Grund der *Newtonschen* Mechanik dargestellt und dann der von der Wellenmechanik von *Mott* und *Sextl* vorausgesagte und vom Experiment bestätigte Interferenzeffekt bei dieser Streuung durchgerechnet. Bei allen bisher behandelten Fragen konnte der Kern als Punktladung vorausgesetzt werden, so daß es sich um strenge Einkörperprobleme handelt. Dies gilt nicht mehr für die in der sechsten bis zehnten Vorlesung erörterten Probleme. Als deren erstes wird in der sechsten Vorlesung die qualitative und in der siebenten Vorlesung die quantitative Theorie des radioaktiven Zerfalls schwerer Teilchen behandelt, wobei letztere ebenfalls dem Autor zu verdanken ist. In der achten Vorlesung werden die Experimente und die Theorie von *E. Guth* und *Th. Sextl* der Kernstreuung geladener Teilchen ausführlich dargestellt. Die Theorie der Streuung von Neutronen an Atomkernen, insbesondere an Protonen, ergibt sich in der neunten Vorlesung als Spezialfall der Theorie der Streuung geladener Teilchen für den Fall verschwindender Ladung des Streuteilchens. In der zehnten Vorlesung werden durch Übertragung des bei den Problemen der Kernstreuung geladener Teilchen aufgefundenen Potentialmuldenmodells auf den einfachsten zusammengesetzten Kern, das Deuteron, die meisten Erfahrungstatsachen wie Grundzustand, Spin, Statistik, magnetisches Moment, Streuung, Einfangung und Photoeffekt im Einklang mit der Erfahrung streng als Einkörperprobleme behandelt.

Sämtliche Ableitungen zeigen die große mathematische Präzision des Verfassers im schönsten Licht und machen den Lesenden mit den Methoden der theoretischen Physik vertraut. Am Schluß jeder Vorlesung ist die Literatur des behandelten Problems angeführt; der vorgetragene Stoff wird außerdem durch gut ausgewählte Beispiele samt Lösungen dem Verständnis des Lesenden nähergebracht. Das Werk stellt eine wichtige Bereicherung der Literatur in der Kernphysik dar und kann dem Studierenden der theoretischen Physik wärmstens empfohlen werden. Druck und Ausführung des Werkes stellen dem Verlag ein hervorragendes Zeugnis aus.

P. Urban, Graz.

Über neuere Entwicklungen der Physik. Vorträge von *F. Seidl*, *K. Przibram* und *G. Wagner*. Mit Textabb., VI, 79 S. Wien: F. Deuticke. 1948. S 10.—.

Die Vorträge, die in einer vom Verein zur Förderung des physikalischen und chemischen Unterrichts veranstalteten Fortbildungswoche gehalten wurden, behandeln einige Teilgebiete der neueren physikalischen Forschung: experimentelle und theoretische Probleme der Kernphysik, der Ultraschall, das Elektronenmikroskop werden in anregender Weise besprochen.

A. Székely, Graz.

Die Idee der Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt von *H. Thirring*. Dritte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 8 Textabb., VI, 168 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. S 28.—, sfr 12.—, \$ 2.80.

Das naturwissenschaftlich interessierte Publikum wird sicher den Neu-
druck der bereits vergriffenen 2. Auflage des aus der Feder des bekannten

Wiener Physikers Prof. *H. Thirring* stammenden Buches „Die Idee der Relativitätstheorie“ lebhaft begrüßen, um so mehr, als die Neuauflage durch Einfügung eines neuen Kapitels über Atomenergie nicht unerheblich erweitert wurde.

E. Ledinegg, Graz.

Lehrbuch der Technischen Kernphysik. Von *H. Watzlawek*. Mit 209 Textabb., XV, 324 S. Wien: F. Deuticke. 1948. S 105.—, geb. S 120.—.

Dem Verfasser ist es gelungen, eine vom heutigen Standpunkt vollständige Übersicht über die Methoden der Kernerforschung, bzw. Kernumwandlungen zu geben.

Die Ansicht des Verfassers, welcher in der Einleitung meint, der Zeitpunkt für die Ablösung „wirklichkeitsfremder“ Gelehrter durch tatkräftige Ingenieure in der kernphysikalischen Entwicklungsarbeit sei gekommen, kann jedoch nur als Entgleisung bezeichnet werden. Abgesehen davon, daß alle vom Verfasser angeführten kernphysikalischen Methoden von Physikern stammen, sind auch noch heute Wissenschaftler und Physiker zur Pionierarbeit auf diesem Gebiete unentbehrlich.

Das Buch, welches reichlich mit Tabellen und Prinzipzeichnungen ausgestattet ist, die zum Großteil aus der physikalischen Literatur entnommen sind, vermittelt nicht nur dem Laien eine sehr hübsche Einführung in die Problemkreise der Kernphysik, sondern kommt auch dem Physiker als Nachschlagebehelf zustatten. Die ersten zwei Kapitel geben eine kurze Übersicht über die Physik der Atomhülle sowie des periodischen Systems der Elemente und der natürlichen Radioaktivität; letztere liefert den Anschluß an die künstliche Radioaktivität und die erzwungenen Kernumwandlungen, welche in dem ausführlich gehaltenen 3. Kapitel sehr anschaulich auseinandergesetzt werden. Während die genannten Abschnitte den Leser über den prinzipiellen Ablauf von Kernreaktionen unterrichten, wird in den folgenden zwei Kapiteln wieder sehr ausführlich die Wirkungsweise der Apparate beschrieben, welche zur experimentellen Kernphysik benötigt werden. Das 5. Kapitel ist den Nachweisapparaturen und den verschiedenen Verfahren zur Isotopentrennung gewidmet, die der Verfasser besonders eingehend behandelt hat. Das 6. Kapitel beschäftigt sich mit den Erzeugern der zur Auslösung der Kernreaktionen notwendigen Primärenergie. Von dem im Prinzip einfachen Stoßgenerator bis zum modernen Strahlentransformator ist hier alles enthalten. Die beiden letzten Kapitel beschäftigen sich schließlich mit den verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten der Atomenergie auf Wissenschaft und Technik.

Der elementare Charakter des Buches kommt dem bestehenden Interesse des Publikums für Kernphysik entgegen und verbürgt damit einen weiten Leserkreis, wenngleich auch aus diesem Grunde die Probleme der Kernphysik mathematisch unerörtert bleiben mußten und dem Leser ein tieferes Verständnis versagt bleibt.

Nicht unerwähnt soll schließlich die sorgfältige Ausstattung des Buches bleiben, um welche sich die Verlagsbuchhandlung F. Deuticke in dankenswerter Weise bemüht hat.

E. Ledinegg, Graz.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatschrift des Verfassers; darunter: „Mit . . . Abbildungen.“

Inhaltsübersicht: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Inhaltsübersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. . . . kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes, als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also $(a + b) / c$

$$\text{statt } \frac{a + b}{c} \text{ oder } \frac{E}{k T} \text{ statt } \frac{E}{k T}.$$

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. Dempster, Nature 136, 180 (1935). Um Einheitlichkeit in den Abkürzungen der Zeitschriftenzitate zu erreichen, ist die Herausgabe eines Verzeichnisses geplant.

Korrekturen. Grundsatz muß angesichts der schwierigen Verhältnisse in der ganzen Drucklegung sein, daß sich der Autor, der seine Abhandlung veröffentlicht sehen will, stillschweigend verpflichtet, ebensoviel Sorgfalt, wie er für Literaturstudium, Rechnungen, Beobachtungen aufwendet, auch für die Niederschrift seiner Ergebnisse und die anschließende Korrekturarbeit aufzubringen; auch dann, wenn er seine Interessen bereits wieder anderen Problemen zugewendet hat.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Soeben erschien:

Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen

Von

Prof. Dr. P. Gombás

Direktor des physikalischen Instituts der Universität für technische Wissenschaften
in Budapest

Mit 59 Textabbildungen. VIII, 406 Seiten. 1949

S 186.—, sfr. 80.—, \$ 18.60

Geb. S 195.—, sfr. 85.—, \$ 19.50

Heute ist die statistische Theorie des Atoms nach einer raschen Entwicklung so weit fortgeschritten, daß sie über viele Eigenschaften der Atome, Moleküle und der zusammenhängenden Materie Aufschluß geben kann. Damit ist ein Weg zum tieferen Verständnis atomphysikalischer Probleme erschlossen, der wegen der Anschaulichkeit und des einfachen gedanklichen Aufbaues der Theorie (die notwendigen Vorkenntnisse beschränken sich auf die elementarsten Regeln der Differential- und Integralrechnung) auch von jenen beschritten werden kann, die nicht mit dem komplizierten mathematischen Apparat vertraut sind, der sonst in der modernen Atomphysik vorherrscht

Soeben erschien:

Die Behandlung und Reindarstellung von Gasen

Ein Hilfsbuch zur Einführung in das Arbeiten mit Gasen
für Chemiker, Physiker und Industrie-Laboratorien

Von Prof. Dr. Alfons Klemene, Wien

Zweite, vermehrte Auflage

Mit 104 Textabbildungen. X, 258 Seiten. 1948

S 78.—, sfr. 34.—, \$ 7.80

Soeben erschien:

Integraltafel

Von

Prof. Dr. W. Gröbner, Innsbruck, und **Prof. Dr. N. Hofreiter**, Wien

Erster Teil: **Unbestimmte Integrale**. VIII, 166 Seiten. Format 30×21 cm. 1949

S 54.—, sfr. 23.50, \$ 5.40

Zweiter Teil: **Bestimmte Integrale**. In Vorbereitung

Zu beziehen durch jede Buchhandlung